

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

57e jaargang
1981/1982
no. 8
april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 45,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 30,–; contributie zonder Euclides *f* 25,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1^1/_2$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 40,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 23,55. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 6,65 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Ten Geleide

In Euclides, *56* nr 2 (oktober 1980) heeft Vredenduin kritiek geleverd op het voorstel van de HEWET-kommissie de relaties uit het leerplan te schrappen. Zijn argument vóór het handhaven van de relaties komt er vooral op neer dat met de relaties er een duidelijk, helder en logisch korrekt taalgebruik aanwezig is, wat ook didaktische voordelen heeft. Dit stuk heeft reakties opgeroepen van de kant van gebruikers van wiskunde: Biezeveld, docent natuurkunde en hoofdredakteur van Faraday, het natuur- en scheikunde-pendant van Euclides, betoogt dat door het puur wiskundige taalgebruik de essentie van wat wiskunde volgens hem is in de praktijk voor de leerlingen volkomen verloren gaat. Freudenthal heeft hierop weer gereageerd door op het taalaspekt en de onderlinge verbanden die daar liggen nog eens uitvoerig in te gaan. Zwaneveld reageert tenslotte op wat er voor problemen in de praktijk liggen en hoe men deze problemen te lijf kan gaan. De reaktie van Vredenduin op het artikel van Freudenthal sluit deze artikelen af.

De redaktie hoopt dat deze diskussie de lezers zal opwekken hun visie op wat de leerlingen van wiskunde moeten leren in Euclides te publiceren.

de redaktie

Taal van wiskundigen en taal van leerlingen

HUBERT BIEZEVELD

In Euclides, 56 nr. 2 doet Vredenduin een paar aanbevelingen naar aanleiding van het HEWET-rapport. Ik heb dat stuk met stijgende verbazing gelezen, maar dacht eerst: de mathematen zullen zelf wel reageren. Nu blijkt dat er geen reacties komen, zodat ik moet aannemen dat het artikel met instemming ontvangen is. Daarom zal ik als betrekkelijke outsider proberen aan te geven wat me in het stuk tegenstaat.

Misschien is tegenstaan een te sterk woord en moet ik schrijven over verbazing en hilariteit over het volstrekt naïef opschrijven van sommige zinnen. Het begint al in de eerste alinea (de cursiveringen zijn van mij): 'Bovendien werd een taal en een symboliek ontwikkeld die het *wiskundigen* mogelijk maakt *hun* gedachten scherper te formuleren en ook duidelijker.' Aan het eind van dezelfde bladzijde: 'Doel was uitsluitend een taal te scheppen waarin *we* ons scherp kunnen uitdrukken en die voor onze leerlingen niet te moeilijk is en hun het denken vergemakkelijkt.' Bovenaan blz. 50: 'Evenmin is het verstandig logica te gaan bedrijven. De bedoeling van het gebruik van logische operatoren is helder te leren denken.'

Voorlopig tot zover de citaten. Ik ben het met Vredenduin eens dat het onverstandig is om (sec) logica te gaan bedrijven. Ook is helder leren denken een nastrevenswaardig doel. De middelen die gebruikt worden om dat doel te bereiken zijn echter fout, omdat ze van het doel afleiden.
De fout die er gemaakt wordt is, dat er gedacht wordt dat taal die voor wiskundigen goed is ook voor leerlingen geschikt zou zijn. De manier waarop ik vaak wiskunde zie bedrijven doet me denken aan leren praten van kleuters op deze manier: 'Itte pap.' 'Nee Jantje, niet itte pap, maar: ik wil een bordje pap. Zeg eens!' 'Itte pap.' 'Foei, Jantje toch. Jij krijgt vandaag geen pap.' Wie beweert dat ik overdrijf heeft gelijk. Wie beweert dat het nergens op slaat heeft ongelijk. Wie een kleuter meteen ABN wil laten praten – waar *wij* ons zo helder in kunnen uitdrukken – maakt van zo'n kind een nerveuze stotteraar. Ik zie teveel wiskundig nerveus gestotter om me heen om voorlopig toch te menen, dat mijn voorbeeld lijkt op de werkelijkheid.
Je kan de fout ook anders omschrijven. Iedere leraar loopt altijd het risico dat hij van zijn leerlingen vakcollega's wil maken. We zien de leerlingen dan als

wiskundigen, natuurkundigen, anglisten en litteratoren (in de dop). Natuurlijk is het leuk als een leerling na het eindexamen jou de eer aandoet om in jouw vak verder te gaan, maar toch mag onze belangstelling naar die leerlingen niet in eerste instantie uitgaan. Een natuurkundeleraar zal zijn leerlingen oog moeten bijbrengen voor de natuurkundige aspecten van de wereld om hen heen. Op zo'n manier natuurkundig bezig zijn is net een belangrijke nuance verschillend van de leerlingen opleiden tot natuurkundigen. Een vergelijkbare uitspraak geldt voor wiskundeleraren, voor alle leraren.

Uit de gekozen citaten valt af te leiden dat Vredenduin (en hij niet alleen) uitgaat van een verkeerde volgorde. De afgelopen eeuwen hebben wiskundigen ontdekt dat allerlei activiteiten uit de meetkunde, zoals spiegelen en roteren, in feite gelijkwaardig zijn aan de algebraïsche handelingen die horen bij het maken van functies. In een verzamelwoord als afbeelding is tenslotte een synthese bereikt. Allerlei losse feiten blijken opeens als stukjes uit een puzzel in elkaar te schuiven en zo een nieuw geheel van grote schoonheid op te leveren.
De indruk die ik als half buitenstaander- half ingewijde van het moderne wiskunde-onderwijs heb gekregen is, dat te vaak met de lege eindstructuur wordt begonnen en dat dan wordt geprobeerd die langzamerhand te vullen. Toch zou ook hier wel eens kunnen gelden, dat de ontogenese de herhaling is (of althans behoort te zijn) van de fylogenese. In onze logische operatoren zit bijv. de ervaring van vele eeuwen wiskundig bezig zijn samengebald. Onze leerlingen zullen derhalve ook *eerst* die ervaringen moeten opdoen, opdat ze *later* oog kunnen krijgen voor de schone synthese.
Ja, zal Vredenduin zeggen: maar die wiskundige taal van ons is zo geschikt voor zinvolle communicatie. Accoord, maar er zijn meer talen. Laten we nu eens niet kijken naar een kleuter die taal leert, maar naar een gastarbeider. Wanneer wij gastarbeiders benaderen met het taaltje dat men op de TV Klukkluk laat praten, zal Achmed nooit Nederlands leren. De zinnen die wij tegen hem uitspreken zullen correct moeten zijn, daar heeft hij recht op. Maar niemand zal het toch in zijn hoofd halen om een taalcursus voor gastarbeiders op te bouwen rondom de kennis van het naamwoordelijk en werkwoordelijk gezegde. Toch is dat precies wat er in het huidige wiskunde-onderwijs wel gebeurt.
Een verbalistische rijstebrijberg verhindert onze leerlingen te komen tot het heldere inzicht dat inderdaad zo nodig is. Tot verbalistische brij reken ik bij voorbeeld de produkten van verzamelingen en notaties met
$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 2y = 6\}$.

Wat verder opvalt in Vredenduins stuk is het gebruik van het woordje *snel*. Blz. 51 (midden): 'Hoe kunnen we op een snelle manier het nodige hierover onze leerlingen bijbrengen?' Bovenaan blz. 52: 'Dit voorbeeld geeft een snelle voorbereiding tot relaties van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ en hun grafieken.' 'De grafiek is gauw gevonden.' 'De grafiek . . . geeft nu geen moeilijkheden meer.' Ja, voor ons, die dit al eindeloos vaak gedaan hebben is dit allemaal *snel*, *gauw gevonden* en *zonder moeilijkheden*. Hoe weet Vredenduin dat dat ook geldt voor leerlingen (en dan niet voor de goede die er toch wel komen, maar voor de gewone.)?
Ik schreef in het begin over hilariteit. Die kwam over mij toen ik op blz. 52 onderaan las over het verleden waarin wij zo slordig omgingen met betrekkin-

gen. 'Zulke rare terminologie gebruikten we echt: ik hoop dat men zich dat tegenwoordig nauwelijks meer kan voorstellen.' Nee, dan nu: 'Voor welke $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ geldt: de grafiek van de functie $x \rightarrow px^2 + px - q$ heeft twee punten met de x-as gemeen? Deze vraag is scherp gesteld.' Ja, scherp gesteld, door een mathemaat aan een mathemaat. Maar zijn er nu echt minder leerlingen dan vroeger die vragen: meneer wat staat daar nu eigenlijk? Alleen in uiterste naïviteit kan iemand zo'n zinnetje uit de pen krijgen.

Aan het slot van zijn stukje schrijft Vredenduin: 'We hebben bij de vernieuwing van 1968 de beschikking gekregen over een taal in de schoolwiskunde waarin *we* ons duidelijk konden uitdrukken, omdat hij voldoende logische scherpte heeft. Dat kan didactisch niet anders dan een voordeel zijn.'
De logische waarde van deze uitspraak ontgaat mij. Dat *we* (de wiskundigen, waartoe ik mezelf ook graag reken) ons scherper kunnen uitdrukken, wil helemaal niet zeggen dat de leerlingen dat dan ook kunnen, of dat ze ons beter verstaan. Als ik naga hoe mijn leerlingen hun wiskundige kennis in de natuurkundelessen (niet weten te) gebruiken, dan kom ik eerder tot de conclusie dat hun inzicht wordt verduisterd door het hun aangeleerde jargon.
Ik heb al eerder in Euclides geschreven dat ik wiskunde niet alleen zie als een hulpwetenschap voor andere vakken – ik zeg het maar voor ik dat verwijt weer krijg. Ik pleit niet voor toegepaste wiskunde maar voor toepasbare wiskunde.

De veranderingen van 1968 hebben slechts in beperkte mate vernieuwingen opgeleverd. Iemand met enige kennis van zaken constateert dat vrijwel dezelfde problemen worden aangeboden aan de leerlingen. Ergerlijk is echter dat die oude problemen worden verpakt in een steriele nomenclatuur die voor de leerlingen een extra barrière vormt.
Het woord steriel klinkt onvriendelijk. Men kan echter ook denken aan de abstracte zuiverheid van een volmaakte structuur. Voor een gevorderde wiskundige is die steriele ruimte een wonder van schoonheid. Voor de beginner is die zuivere structuur een dor doods ding dat afschrikt.

Over de auteur:

Hubert Biezeveld (1939) studeerde natuur- en wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Hij is natuurkundeleraar aan de RSG West-Friesland in Hoorn en hoofdredacteur van Faraday, tijdschrift voor het onderwijs in natuur- en scheikunde.

Taalfetisjisme

HANS FREUDENTHAL

Ik ben het met H. Biezeveld[1]) op alle punten eens, op twee na. Het eerste – minder belangrijke – is mijn bezwaar tegen het woord 'mathematen' al weet ik dat het bij de physen in zwang is. Het tweede is de misvatting: Wie zwijgt, stemt in. Het is veeleer om het met de Prediker te zeggen: 'De woorden zijn zo moede geworden dat ze niet meer uitgesproken willen worden.' En als ik ter plaatse verder lees: 'Er is niets nieuws onder de zon' en 'Het kromme kan niet recht gebreid worden.' Waarom zich nog druk maken over 'ijdelheid en kwelling des geestes'?

Biezeveld vergist zich. Als Vredenduin[2]) het over 'de wiskundigen' en 'we' heeft, spreekt hij pro domo, een achtenswaardig huis, maar piep-klein, dat heilige huisje. Biezeveld hoeft maar terug te bladeren tot het artikel dat aan Vredenduins voorafgaat om kennis te nemen van andere denkbeelden omtrent wiskunde-*onderwijs* en hij hoeft maar welk wiskundig werk ook open te doen om met een andere visie omtrent *wiskunde* dan Vredenduins geconfronteerd te worden.

Maar voor de rest legt Biezeveld terecht de vinger op de feiten in Vredenduins betoog. 'Een taal te scheppen waarin we ons scherp kunnen uitdrukken en die voor onze leerlingen niet te moeilijk is en hun denken vergemakkelijkt.' Aldus Vredenduin.

Ik had Vredenduins artikel willen ignoreren, maar Biezeveld heeft me uitgedaagd. Dus moet het weer eens.

'Als iemand zegt: dit is een eik, beweert hij dat het aangewezen object een element is van de verzameling van de eiken.' (Het eikdom?) Vredenduin zou zo kunnen doorgaan: 'Als iemand zegt: dit is Piet, beweert hij dat de voorgestelde een element is van de verzameling van Pieten.'

Het zou weleens nog kunnen kloppen ook. Bijvoorbeeld: Als de vraag gesteld was 'wijs me een element van de verzameling der eiken (Pieten)' en die iemand ergens naar toewijst met de woorden: 'dit is een eik (Piet).' Maar het lijkt me een wat gezochte situatie.

Kort geleden hoorde ik een tienjarige spontaan verklaren: '23 is een priemgetal.' Hij heeft er zeker niet mee willen beweren dat 23 element is van de verzameling der priemgetallen. Hij is wel een verwoed verzamelaar, maar op het verzamelen van priemgetallen heeft hij zich nog niet toegelegd.

'Hij is ook pas tien', kun je zeggen. Veiligheidshalve heb ik hem toch gevraagd, hoe hij dat wist. Hij zei dat 23 door geen getal deelbaar is. Ik lanceerde een voor de hand liggende tegenwerping, die hij – terecht – als flauw afdeed.

Maar laat het nu waar zijn wat Vredenduin stelt. Hoe is die verzameling van de eiken, Pieten, priemgetallen, waar die iemand iets omtrent zou staan te beweren, gedefinieerd? Heel eenvoudig:

$\{x \in$ flora $| x$ is een eik$\}$,
$\{x \in$ mensdom $| x$ is een Piet$\}$,
$\{x \in \mathbb{N} \,|\, x$ is een priemgetal$\}$.

Een onfeilbaar recept. Het werkt ook voor relaties. 'Ik geef Jan dit boek.' Daar hebben we volgens Vredenduin de relatie 'geef'. 'Geef' is ook weer een verzameling, te weten:

$\{(x, y, z) \in$ mensdom $\times$ mensdom $\times$ dingen $| x$ geeft y aan $z\}$,
waarvan dan geldt:
$\{$ik, Jan, boek$\} \in$ geef.

Het is echt gemeend. Iets verder merkt Vredenduin op: 'Essentieel is dat een relatie van V naar W een verzameling geordende paren (x, y) is waarin $x \in V$ en $y \in W$.' Dus het essentiële bij 'x is deler van y' is de verzameling:

$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x$ is deler van $y\}$

en ga zo maar door.

Je zou zeggen, dat je in een kringetje ronddraaide. Maar dit is niet zo. Je mag heus ieder predicaat, iedere relatie 'in extensie' omzetten in een verzameling. 'In extensie' betekent dat je de relatie R, zeg tussen x, y, z, u, vervangt door de verzameling:

$\{(x, y, z, u) \,|\, R\,(x, y, z, u)\}$.

Het helpt alleen niets. Je kunt er aan de gang mee blijven, want omtrent de nieuwe verzamelingen doe je ook weer uitspraken in de vorm van predicaten en relaties en die zou je ook weer dood moeten praten. Bijvoorbeeld: 'Wie zegt dat de verzameling der 6-vouden deelverzameling is van de verzameling der 3-vouden, beweert dat

(6-vouden, 3-vouden) $\in \{V \times W \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \,|\, V \subset W]$.

Gelukkig doet nietmand zo gek. Ook Vredenduin niet. Op blz. 53 is hij vergeten wat volgens hem een relatie is. Hij werkt met de relatie 'congruent' heel normaal, niet extensioneel alsof het een verzameling

congruent $= \{(A, B) \in$ figuren $\times$ figuren $| A$ congruent $B\}$

was.

'De zelfstandige naamwoorden, die we vinden bij grammaticale analyse van de taal, corresponderen met de verzamelingen, die we bij logische analyse vinden.' Aldus Vredenduin. Neen, neen, neen. Wat we bij *logische* analyse vinden, zijn predicaten zoals '. . . is een eik', . . . is een Piet', '. . . is een priemgetal.' Je kunt er in extensie verzamelingen van maken met alle gevolgen van dien. Zo kun je ook relaties in extensie in verzamelingen omzetten. Maar wat kan, moet nog niet. En bovendien moet je tòch blijven onderscheiden tussen een predicaat (relatie) en

zijn extensie, die een verzameling is.
'Welke betrekking bestaat tussen p en q als de grafiek van de functie $px^2 + px - q$ de x-as in twee verschillende punten snijdt?' – een afschrikwekkend voorbeeld volgens Vredenduin uit vroeger tijden, want dan kon een leerling vragen 'betrekking, Mijnheer, wat is dat?' Betrekking, inderdaad, dat is iets waar je voor solliciteert en waar je in benoemd kunt worden. En verzameling dan? Iets wat je bij elkaar verzamelt. En relatie? Dat is zo iemand die weet hoe je aan een tweedehands bromfiets kunt komen. Vraagt dan geen leerling 'relatie, Mijnheer, wat is dat?' Het antwoord is nu gemakkelijk. Immers dat is:

$\{(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid$ de grafiek van $x \to px^2 + px - q$ snijdt de x-as in twee verschillende punten$\}$.

Het is alleen jammer dat de betrekkingen (of relaties, verbanden, enz.) nu eenmaal ook buiten de context van vierkantsvergelijkingen voorkomen en dat taal nog een andere functie heeft dan om vier-keuze-toetsen onberispelijk te formuleren en om via vierkeuze-toetsen getoetst te worden.
Wiskunde wordt in een wereld beoefend, waar verbanden (betrekkingen, relaties) zich voordoen, die vragen om wiskundig (niet verzamelingstheoretisch of verzamelingslinguistisch) geanalyseerd te worden – verbanden zoals er zijn tussen inkoop en verkoop, werk en loon, snelheid en remweg, valweg en valtijd, druk, temperatuur en volume (van een gas), roken en longkanker. Functies zijn hiervoor een belangrijk hulpmiddel, relaties komen er ook weleens bij te pas en als het stochastische verbanden zijn, correlaties. Al deze verbanden te willen terugbrengen tot de ene relatie 'is element van' is taalfetisjisme, waarmee je de wiskunde afschermt tegen de realiteit. Er zijn belangrijker dingen om leerlingen bij te brengen dan ze te trainen in een taalgebruik dat zij na het examen mogen – neen: moeten – vergeten.

Noten

1) H. Biezeveld, *Taal van wiskundigen en taal van leerlingen*, Euclides 57/(1981/82), 294 e.v.
2) P. G. J. Vredenduin, *Verzamelingen, functies, relaties en het HEWET-rapport*, Euclides 56 (1980/81), 49-54.

Noties en notaties bij funkties en relaties

BERT ZWANEVELD

In het wiskundeleerplan van 1968 voor de rijksscholen zijn verzamelingen, funkties en relaties voor alle schooltypen van ons voortgezet onderwijs opgenomen. In deze reaktie wil ik het niet hebben over verzamelingen, wel over funkties en relaties.
Waar het mij vooral omgaat is dat individuele docenten en sekties meer vanuit een visie op wat relevant voor de leerlingen is werken dan vanuit de dwang van het programma of het boek.
Vredenduin geeft in (1) een aantal argumenten voor het opnemen van de verzamelingen, funkties en relaties. In (2) geeft Biezeveld aan dat er in de praktijk van alledag wel wat problemen zijn. Freudenthal reageert in (3) op beiden. Graag wil ik nog iets over die praktijk naar voren brengen.

a Eerstegraadsfunkties

In de loop van de eerste twee jaar wordt het funktiebegrip langzaamaan bij de leerlingen ontwikkeld. Dat gebeurt via tabelletjes, getallenparen, punten in een koördinatenstelsel, grafieken. De situaties, waaraan de voorbeelden worden ontleend, komen van buiten de wiskunde (gewichtje aan een veer en de uitrekking daarbij, o.i.d.) of van binnen de wiskunde (bij een gegeven rijtje getallen steeds 3 optellen, bijv.). Bij die laatste voorbeelden ervaren de leerlingen zeker dat het steeds om hetzelfde gaat, en dat het handig is datzelfde kortweg als $x \to x + 3$ te noteren. Nadat een en ander is vastgelegd in een grafiek kan het een beetje anders geformuleerd en nadien ook genoteerd worden: het tweede getal in een paar is 3 meer dan het eerste getal; heet het eerste getal x en het tweede y, dan kun je schrijven $x + 3 = y$ of $y = x + 3$. Hierop kan ingespeeld worden door de leerlingen bij een gegeven rijtje getallenparen, of tabel, of grafiek uit een gegeven aantal formules te laten kiezen: $x - y = 3$, $y = x + 3$, $x = y + 3$, enz. De belangrijkste aktiviteit voor de leerlingen is dan invullen van getallenparen. Geleidelijk zal de notie, dat het om individuele getallenparen gaat zich verbreden tot een wat globalere notie: de funktie.

b
Een probleem voor de wiskundedocenten van de onderbouw is dat alle ingewikkelde woorden en notaties in veel schoolboekjes staan (natuurlijk, want deze woorden staan in het leerplan en een boek dat het leerplan niet dekt, wordt op geen school ingevoerd). De praktijk zal hopelijk vaak zijn dat de stukjes, waar deze woorden en notaties voorkomen, minder tot geen aandacht zullen krijgen; dat dergelijke niet noodzakelijke dingen niet in proefwerken teruggevraagd zullen worden; dat docenten $y = 3x + 2$ niet fout zullen rekenen als het antwoord 'volgens het boekje' $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2\}$ zou moeten zijn.
Eén van de slechte gevolgen is ongetwijfeld dat leerlingen het volgende idee van wiskunde krijgen: 'Schoolboekenschrijvers moeten blijkbaar moeilijk doen als het net zo goed makkelijk kan (of is); in een uitdrukking als $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \ldots\}$ lees ik alleen wat op de puntjes staat, want dat is het enige dat van belang is.'

c
Natuurlijk moeten de leerlingen ervaren en leren, dat het vaak handig is, en zeker vaak gebruik is, ingewikkelde formuleringen door een enkel woord te vervangen: in plaats van de omslachtige formulering 'het positieve getal waarvan het kwadraat 6 is' gebruiken we kortweg 'wortel 6'. Net zo zullen docenten er met recht en reden voor kiezen hun leerlingen voor 'alle getallen die voor x kunnen worden ingevuld' het woordje 'domein' te laten gebruiken.

d
Natuurlijk zijn er in alle schooltypen leerlingen die meer aankunnen. Wellicht kiezen ze wiskunde in hun pakket. In de onderbouw hebben zij – passief – allerlei begrippen en notaties geleerd. Met deze leerlingen is over de samenhang tussen de begrippen en notaties te praten, over de voordelen van het hebben van meer namen voor die begrippen en van het hebben van uitvoeriger notaties. Zij zullen dan kunnen overgaan tot het aktief zelf gebruiken van die namen en notaties. In welke mate en hoever? Dat hangt van elke individuele docent(e) of sektie af. Misschien kan het wel beperkt blijven tot de bovenbouw van het vwo en misschien hoeft het ook daar nauwelijks.

e
Ik pleit dus voor grote vrijheid voor de individuele docent(e) of sektie. Maar dan moeten de formuleringen van het eindexamen hem/haar niet in de wielen rijden.

Noten

1) P. G. J. Vredenduin, *Verzamelingen, functies, relaties en het HEWET-rapport*, Euclides, *56* nr. 2, blz. 49.
2) Hubert Biezeveld, *Taal van wiskundigen en taal van leerlingen*, Euclides, 57, nr. 7, blz. 294.
3) Hans Freudenthal, *Taalfetisjisme*, Euclides, 57, nr. 7, blz. 297.

Naschrift

Ik heb de artikelen van Biezeveld, Freudenthal en Zwaneveld gelezen. Ik vind het stuk voor stuk waardevolle bijdragen. Ze belichten belangrijke facetten van het wiskunde-onderwijs. Ik geef toe dat ik het over deze facetten niet gehad heb. En ook dat ze in veel opzichten belangrijker zijn dan datgene waar ik het over gehad heb.
Alleen Freudenthal probeert, waar het het verzamelingsbegrip betreft, in te gaan op dingen die ik gezegd zou hebben. Helaas legt hij me dingen in de mond die ik niet beweerd heb en nooit zou willen beweren, en bestrijdt die daarna.
Mag ik het hierbij laten? Ik zou een discussie kunnen starten of, en zo ja in hoeverre de dingen die ik beweerd heb, wel van belang voor het onderwijs kunnen zijn. Het lijkt me dat ik de lezers van Euclides daarmee geen genoegen doe.

P. G. J. Vredenduin

Korrel

De zegswijze 'uitdrukken in'

Een leerling die deze uitdrukking voor het eerst tegenkomt, begrijpt veelal niet wat ermee bedoeld wordt. Voor de leraar is de bedoeling evident. Totdat hij deze de leerling duidelijk moet maken.
Als men vraagt iets in p uit te drukken, mag p dan in het antwoord voorkomen? Uiteraard: ja.
Moet p in het antwoord voorkomen? Neen. Bijv.:
$f: x \rightarrow 3x + 1$; druk $f(p + 1) - f(p)$ in p uit.
Antwoord: $f(p + 1) - f(p) = 3$.
Mogen er in het antwoord ook andere variabelen dan p voorkomen? Ja. Bijv.:
$f: x \rightarrow ax + 5$; druk $f(p + 1)$ in p uit.
Antwoord: $f(p + 1) = ap + a + 5$.
Is alles dan geoorloofd? Betekent 'druk in p uit' misschien hetzelfde als 'herleid'? Hoe zit het nu eigenlijk?

'Druk A in p uit' wil zeggen: schrijf A als functie van p.
(Meebedoeld is steeds de uitkomst zo eenvoudig mogelijk te schrijven. Wat met 'zo eenvoudig mogelijk' bedoeld is, laat zich niet exact omschrijven. Het is een term uit de omgangstaal en niet uit de wiskunde.)
Ik vraag me af: als we bedoelen te eisen A als functie van p te schrijven, waarom gebruiken we dan de ietwat kryptische uitdrukking: 'druk A in p uit'?
Wie er nog behoefte aan voelt nader uit te leggen wat 'schrijf A als functie van p' betekent, kan zeggen dat hiermee bedoeld wordt: vind een functie f waarvoor $A = f(p)$. Maar dat is wel erg zwaarwichtig.

P. G. J. Vredenduin

Leerdoelgerichte toetsen bij lange-termijn-doelen*

H. BOERTIEN

1 De manier waarop lange-termijndoelen in het onderwijs aan bod komen

Een lange-termijndoel is een doel dat niet in een klein aantal lessen bereikt kan worden en dat bij de behandeling van zeer uiteenlopende leerstofgebieden nagestreefd wordt (zie J. van Dormolen: *Didaktiek van de wiskunde*, Utrecht, 1976, 2e druk, blz. 34).
Een voorbeeld hiervan is 'De leerling kan substitueren'. Hierbij zijn zeer verschillende beheersingsniveaus te onderscheiden. In de brugklas leert de leerling variabelen te vervangen door getallen, terwijl in de hogere leerjaren de leerling moet leren geschikte substituties uit te voeren waarbij één of meer variabelen door andere variabelen vervangen moeten worden. Daarbij spelen herkenning en keuze van geschikte substitutiemogelijkheden een belangrijke rol.
Een voorbeeld van deze laatste vorm van substitutie treedt op bij het oplossen van de vergelijking $2x^4 - x^2 - 1 = 0$. De voor de hand liggende oplossingsmethode begint met het herleiden van de vergelijking tot $2p^2 - p - 1 = 0$ waarbij $x^2 = p$ gesubstitueerd is. Van de leerling wordt ook gevraagd x^4 te zien als $(x^2)^2$.
Men kan opmerken dat, indien een leerling kan substitueren, hij in staat is de toepasbaarheid van aangeleerde standaardalgoritmen zoals het oplossen van vierkantsvergelijkingen te verruimen. Ook valt op te merken dat die verruiming van toepassingsmogelijkheden een creatieve daad van de leerling vraagt als hij voor de eerste keer met een vergelijking van het bovenstaande type geconfronteerd wordt: hij moet de geschikte variabelen kiezen. Omdat het in het algemeen onzeker is of de leerling in zo'n situatie tot een goede oplossingsmethode zal komen, ontstaat er bij de leraar meestal de neiging om de voor dit type vergelijking benodigde toepassing van substitueren met de leerling te gaan inoefenen. Hierdoor wordt weliswaar bereikt dat de leerling soortgelijke vierdegraads vergelijkingen kan oplossen, maar het is onduidelijk of hij in andere situaties er blijk van zal geven de vaardigheid 'substitueren' beter te beheersen.
Het is heel goed denkbaar dat een leerling $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ kan oplossen maar niet in staat is de vergelijkingen $2 \cdot 3^{2x} - 3^x - 1 = 0$ en $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

* Met dank aan drs. J. B. A. M. van Bergen en drs. C. A. M. van der Meijden voor hun kritische opmerkingen bij eerdere versies van dit artikel.

op te lossen, hoewel hij zowel vergelijkingen van het type cos $x = c$ als van het type $3^x = c$ heeft leren oplossen.
Uit het voorgaande is het duidelijk dat dikwijls de beheersing van één of meer lange-termijndoelen verondersteld wordt, wanneer de leerlingen een voor hen onbekend probleem krijgen op te lossen. Van hen wordt dan gevraagd standaardalgoritmen in te passen in mathematisch verantwoorde oplossingsmethoden. De vaardigheden die behoren bij het beheersen van die lange-termijndoelen kunnen zij zich slechts in de loop van enige jaren eigen maken. Om toch op korte termijn de leerlingen te helpen wordt soms het aantal standaardalgoritmen uitgebreid. Daarbij is het de vraag of de leerlingen de lange-termijndoelen beter leren beheersen.

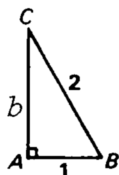
Beheersing van lange-termijndoelen kan niet altijd gecompenseerd worden door uitbreiding van het pakket standaardalgoritmen, omdat dan dit pakket voor de leerling onoverzichtelijk en onhandelbaar wordt. Bovendien is de beschikbare tijd om het lesprogramma uit te voeren in het algemeen voor de meeste leerlingen juist voldoende om het huidige pakket standaardalgoritmen te leren beheersen, zodat uitbreiding van dit pakket ook om praktische redenen niet mogelijk is. Vooral bij meetkundevraagstukken komt vaak beheersing van lange-termijndoelen voor op een manier die moeilijk te systematiseren is of zó dat systematiseren niet zo zinvol lijkt. Om dit duidelijk te maken zal hier een tweetal vraagstukken gegeven worden waarvan de eerste met behulp van een standaardalgoritme opgelost kan worden en de tweede behalve dit algoritme ook nog 'enig gezond verstand' vraagt.

Leerdoel: Pythagoras in rechthoekige driehoeken (eenvoudig).

1 Van $\triangle ABC$ is gegeven: $\alpha = 90°$, $a = 2$ en $c = 1$. Bereken b.

Leerdoel: Pythagoras in rechthoekige driehoeken (toepassing).

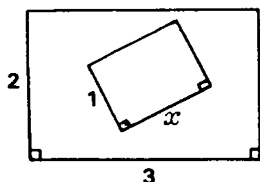
2 In een rechthoekige kamer van 3 meter bij 2 meter wil men een rechthoekige tafel plaatsen die 1 meter breed is. De tafel moet in de kamer geheel rond gedraaid kunnen worden waarbij het tafelblad horizontaal blijft. Wat is de grootst mogelijke lengte van deze tafel?



figuur 1

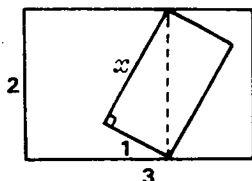
We stellen ons voor dat leerlingen van de 2e klas (AVO) vraagstuk 1 als volgt oplossen:
a Het tekenen (schetsen) van een bij de gegevens passende rechthoekige

driehoek en het noteren van de gegevens in de figuur (zie figuur 1).
b Het zoeken van een manier om b te bepalen.
c Het herkennen van de mogelijkheid de stelling van Pythagoras toe te passen om b te berekenen.
d Het uitvoeren van de berekening.



figuur 2

Vraagstuk 2 kan als volgt opgelost worden:
a Het tekenen (schetsen) van de rechthoekige kamer en een of andere rechthoekige tafel in die kamer, gevolgd door het noteren van de gegevens in de figuur (zie figuur 2).



figuur 3

b1 Het herkennen van de kritieke situatie waarin de grootste lengte x van de tafel in een rechthoekige driehoek voorkomt (zie figuur 3).
b2 Het met behulp van figuur 3 opmerken of beredeneren dat de eis van het gedraaid kunnen worden, impliceert dat de diagonaal van de tafel kleiner dan of gelijk aan 2 meter moet zijn.
c Het herkennen van de mogelijkheid de stelling van Pythagoras toe te passen om x te berekenen.
d Het uitvoeren van de berekening.

Beide vraagstukken vragen van de leerlingen een herkennen van de mogelijkheid de stelling van Pythagoras toe te passen en het kunnen uitvoeren van de bijbehorende berekeningen. Het grote verschil tussen de vraagstukken bestaat daarin dat bij vraagstuk 1 die herkenning een vanzelfsprekendheid is als de stelling van Pythagoras behandeld is, terwijl bij vraagstuk 2 het in de juiste volgorde uitvoeren van een aantal wiskundige activiteiten diezelfde herkenning pas mogelijk maakt. Het vertalen van de gegevens, het maken van geschikte figuren en het werken met die figuren zijn de schakels om het doel (berekenen van x) te bereiken.
Vraagstuk 2 kan uiteraard routinematig opgelost worden als er de nodige oefening heeft plaatsgevonden. Zoals blijkt uit de leergangen en de meningen van

enige leraren wordt het echter niet zo zinvol geacht een algoritme voor het oplossen van dit type vraagstukken aan te leren. Daarom zal vraagstuk 2 in het algemeen van de leerling het inpassen van een standaardalgoritme (Pythagoras) in een zelf te bedenken oplossingsmethode vragen.

Omdat een systematisch herleiden van beheersing van lange-termijndoelen tot beheersing van standaardalgoritmen praktisch gezien niet mogelijk is, is het gevolg veelal dat lange-termijndoelen onsystematisch en niet bewust behandeld worden. Vaak wordt de beheersing van de bij deze doelen behorende vaardigheden niet onderkend, bekend verondersteld of men behandelt ze impliciet bij de oplossing van een probleem. Men gaat bv. zonder nadere aankondiging een goede tekening maken. De leerling ziet dan de tekening wel maar het is hem misschien niet duidelijk dat deze tekening niet als een extraatje beschouwd moet worden, maar als wezenlijk onderdeel van de wiskundige denkmethodiek: werk vanuit het overzicht naar een oplossing van de problemen. De weliswaar terechte opmerking dat een tekening niets bewijst, maakt dat het belang van een tekening voor veel leerlingen verder naar de achtergrond gedrongen wordt. Ook het feit dat soms een ruwe schets voldoende is, maar op een ander moment een tekening pas geschikt is voor zijn doel als deze met voldoende precisie gemaakt is, levert grote problemen op. Al deze omstandigheden zorgen ervoor dat een leerling het maken van een goede tekening teveel moeite vindt en dat er eventueel in voorkomende gevallen een zeer slordige schets gemaakt wordt, die meer misleiding dan sturing aan het denkproces geeft.
Het leren beheersen van lange-termijndoelen wordt vaak grotendeels aan de leerling zelf overgelaten. Daarom zullen enkele leerlingen spontaan de wiskundige denktrant van hun leraar overnemen, terwijl anderen verstrikt raken in een voor hen onoverzichtelijke wirwar van algoritmen en rekenregels. In het algemeen besteden de leergangen ook niet expliciet aandacht aan het aanleren van een goede denktrant los van de leerstof die per hoofdstuk behandeld wordt. In het vroegere meetkunde-onderwijs was de aandacht voor deze doelen één van de zaken die met de term 'vormende waarde van het meetkunde-onderwijs' aangeduid werd. Met het schrappen van dit (inderdaad qua leerstof beperkt toepasbare) gebied van de wiskunde is één van de meest waardevolle onderdelen van de wiskunde uit het gezichtsveld verdwenen. Tegelijkertijd is de aandacht voor de wiskundige houding, die nauw samenhangt met de beheersing van de lange-termijndoelen, daarbij verschoven naar de beheersing van de korte-termijndoelen.

2 De door het Cito geproduceerde leerdoelgerichte toetsen bij lange-termijndoelen

In 1976 is op het Cito het project 'Leerdoelgerichte Toetsen' gestart met het ontwikkelen van toetsseries behorende bij leerdoelen die in de eerste drie leerjaren van het voortgezet onderwijs nagestreefd worden. In het kader hiervan zijn bij de meest frequent nagestreefde lange-termijndoelen toetsen ontwikkeld. Deze doelen zijn opgespoord door na te gaan welke vaardigheden bij het oplossen van wiskundevraagstukken regelmatig (impliciet) aan bod komen. Om de bruikbaarheid van de toetsen zowel bij meer klassikaal als bij meer geïndivi-

dualiseerde werkvormen zo groot mogelijk te maken, zijn er bij elk leerdoel twee parallelversies van 10 meerkeuzevraagstukken geproduceerd.* Tijdens de produktie is ernaar gestreefd per parallelversie dezelfde toetssamenstelling te verkrijgen.
Van het ontwikkelde toetsmateriaal wordt hierna een indruk gegeven door bij elk lange-termijndoel één voorbeelditem uit de bij dat leerdoel behorende toetsen te geven.

Leerdoel: De leerling kan gegevens overzichtelijk weergeven (bijvoorbeeld in een tabel, diagram, grafiek of figuur) en dat overzicht gebruiken bij de oplossing van een probleem.

Cirkel c gaat door de punten (0, 0), (-2, 0) en (4, 2).

Het middelpunt van deze cirkel is

A (0, 5)

B (0, 6)

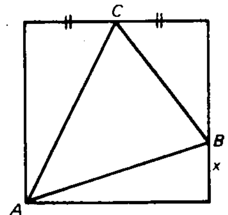
C (-1, 6)

D (-1, 7)

Leerdoel: De leerling kan de gegevens uit een diagram, grafiek of figuur gebruiken bij de oplossing van een probleem.

Het getekende vierkant heeft zijden met lengte 6.

Uit de gegevens in de figuur blijkt dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan



A 18

B $18 + 1\frac{1}{2}x$

C $18 - 1\frac{1}{2}x$

D $27 - 4\frac{1}{2}x$

Leerdoel: De leerling kan een eenvoudige tekst in een kortere wiskundige vorm (vergelijking, ongelijkheid, e.d.) noteren (en omgekeerd).

* Een meer uitvoerige beschrijving van de constructieprocedure van deze series leerdoelgerichte toetsen werd gegeven in het maartnummer (1982) van Euclides onder de titel 'Leerdoelgericht werken in het onderwijs'.

In een competitie geeft de tussenstand aan dat team A x punten en team B y punten heeft.
A en B spelen daarna twee wedstrijden tegen elkaar. A wint de eerste wedstrijd. De tweede wedstrijd eindigt in een gelijk spel.
Hierna hebben A en B evenveel punten.
Een gewonnen wedstrijd levert 2 punten, een gelijk spel 1 punt en een verloren wedstrijd 0 punten op.

Welke vergelijking is goed?

A $x - y = -2$

B $x - y = 2$

C $x - y = -3$

D $x - y = 3$

Leerdoel: De leerling kan controleren of een gegeven ter zake doende is, of er voldoende gegevens zijn, of de gegevens tegenstrijdig zijn.

Met welke gegevens kan *geen* vergelijking van lijn l worden opgesteld?

A l gaat door de punten (0, 0) en (2, 1)

B l gaat door (2, 1) en snijdt de lijn $y = -2x + 4$ loodrecht

C l gaat door (0, 0) en is evenwijdig met de lijn $y = \frac{1}{2}x - 4$

D l snijdt de lijn $y = -2x + 4$ loodrecht en is evenwijdig met de lijn $y = \frac{1}{2}x - 4$

Leerdoel: De leerling kan met behulp van (de definities van) wiskundige begrippen een voor de hand liggende conclusie trekken.
De leerling kan controleren of een conclusie juist is met behulp van substitutie of door een tegenvoorbeeld te bedenken.

$V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = px + q\}$

$(1, -2) \in V$ als geldt

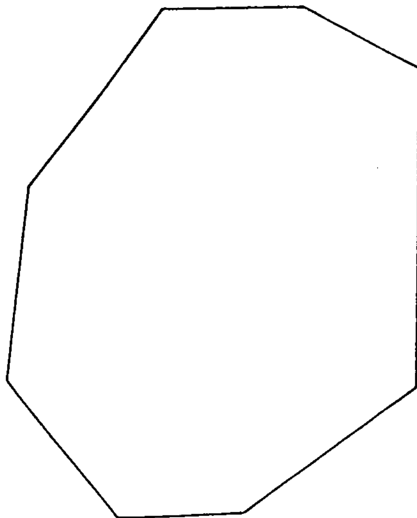
A $1 = -2p + q$

B $-2 = p + q$

C $y = -2x + 1$

D $y = x - 2$

Leerdoel: De leerling kan controleren of een oplossingsmethode goed is (uitgevoerd).
De leerling kan controleren of herleidingen juist zijn (uitgevoerd).



Hoe kan de som van de hoeken van bovenstaande achthoek *berekend* worden?

A De som van de hoeken van een vierhoek is 360°. Dan is de som van de hoeken van deze achthoek 2 x 360° = 720°.

B We tekenen vanuit één hoekpunt alle diagonalen. Dan ontstaan acht driehoeken. De som van de hoeken van deze achthoek is dus 8 x 180° = 1440°.

C We kiezen binnen deze achthoek een punt *P*. *P* verbinden we met de hoekpunten van de achthoek. Er ontstaan dan acht driehoeken. De som van de hoeken van deze achthoek is dan 8 x 180° - 360° = 1080°, want de hoeken bij *P* mogen niet meegeteld worden.

D De som van de hoeken van deze achthoek kan niet met behulp van één van de bovenstaande methoden berekend worden.

3 Gebruiksmogelijkheden van de leerdoelgerichte toetsen bij lange-termijndoelen

De tijd die nodig is om één toets af te nemen, kan geschat worden op ongeveer een half uur. De toetsen kunnen worden afgenomen in de tweede helft van het 3e leerjaar havo/vwo en in de loop van het 4e leerjaar mavo. Op dat moment zal de leraar in het algemeen vinden dat de leerlingen van de 3e klas havo/vwo de lange-termijndoelen op een redelijke manier moeten beheersen, omdat dan de onderbouw min of meer afgesloten wordt en voor de havo de bovenbouw begint. Met name enige informatie die kan dienen om aan te geven, waarom Jantje of Marietje al dan niet aangeraden moet worden wiskunde in het vakkenpakket op te nemen, is dan zeer gewenst. Ook van de leerlingen voor de 4e klas mavo zal men een

zekere beheersing van de genoemde lange-termijndoelen vragen als ze na het examen in de 4e klas havo de wiskundelessen willen volgen.

Als men met het oog hierop de toetsen afneemt, is het zinvol te weten dat er door het Cito geen uitgebreid onderzoek gedaan is om na te gaan in hoeverre de toetsresultaten een voorspellend karakter hebben. Het ligt evenwel voor de hand, dat een goede wiskundige houding bij de aanpak van problemen – welke nauw samenhangt met de beheersing van lange-termijndoelen – een gunstig uitgangspunt geeft voor verdere studie in de wiskunde. In dit verband is het interessant om te weten op welke wijze de scores op de toetsen behorend bij lange-termijndoelen en de rapportcijfers elkaar aanvullen ten aanzien van de informatie over de vorderingen die de leerlingen gedurende 3 à 4 jaar onderwijs gemaakt hebben. Om dit na te gaan werden bij de proefafnames voor deze toetsen ook rapportcijfers opgevraagd. De eerste indruk was dat tussen de toetsscores en de rapportcijfers vaak een goede overeenstemming bestond, maar er werden ook nogal eens afwijkingen geconstateerd. Deze afwijkingen zijn met enige docenten die betrokken waren bij de proefafnames besproken. In die gevallen waarbij de toetsscores nogal tegenvielen werd meestal opgemerkt dat de leerlingen ijverig waren, hun huiswerk goed leerden en dat dus een tegenvallende toetsscore niet verwacht werd. In die gevallen waarbij de toetsscores veel hoger uitvielen dan op grond van de rapportcijfers te verwachten was, werd vastgesteld dat de leerlingen inderdaad een redelijk goede denktrant hadden maar de standaardalgoritmen en rekenregels slecht beheersten.
Als mogelijke oorzaken van dit laatste werden genoemd: achterstand door ziekte, het niet regelmatig maken van huiswerk e.d. Omdat de toetsen zodanig geconstrueerd zijn, dat zo weinig mogelijk een beroep gedaan wordt op beheersing van algoritmen en rekenregels, zijn daarmee de waargenomen afwijkingen wellicht verklaard. Immers omdat de proefwerkcijfers in hoge mate bepaald worden door de beheersing van algoritmen en rekenregels, is het logisch dat zich in het – op deze proefwerkcijfers gebaseerde – rapportcijfer eveneens in belangrijke mate de beheersing van algoritmen en rekenregels weerspiegelt. Een voorzichtige conclusie zou kunnen zijn dat een rapportcijfer gebaseerd op proefwerkcijfers en de scores op de toetsen voor lange-termijndoelen een zuiverder beeld geeft van de vorderingen die de leerling in het vak wiskunde heeft gemaakt. De combinatie van relatief hoge toetsscores op de toetsen voor lange-termijndoelen en lage proefwerkcijfers zou erop kunnen wijzen, dat aanvullend onderwijs om speciaal de algoritmen en rekenregels aan te leren op korte termijn effect kan hebben. Hierbij wordt aangenomen dat de motivatie van de leerling voor het volgen van dit onderwijs goed is.

Brengen we de hoeken soms niet om het hoekje?

RIK VERHULST

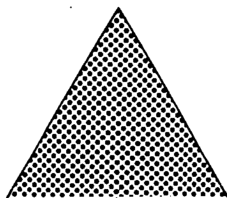
1 Inleiding

Hoeken spelen ondermeer een rol in de meetkunde, de goniometrie en de analyse. De structurele inhoud die zij in elk van deze domeinen vertonen kan nogal eens erg variëren. Hierbij doen zich intrinsieke moeilijkheden voor die soms nog onderschat worden wegens misleidende intuïtieve evidenties. De bedoeling van dit artikel is een aantal van deze moeilijkheden toe te lichten.

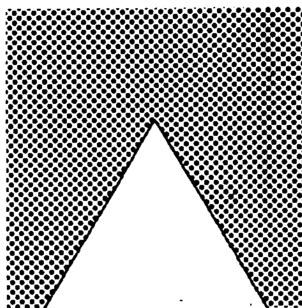
2 Het intuïtieve materiaal

Hierbij enkele voorbeelden hoe leerlingen kunnen uitgenodigd worden om een bepaalde weg in te slaan.

2.1 Een soldaat bewaakt vanaf het snijpunt van twee wegen een zone tussen deze wegen. Zie figuur 1a en 1b.



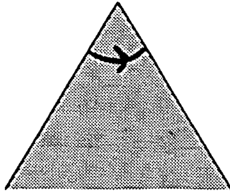
Figuur 1a



Figuur 1b

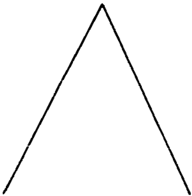
Dit artikel is een samenvattend verslag van de gelijknamige voordracht gehouden op de vijfde gemeenschappelijke studiedag V.V.W.L.-N.V.v.W. op 22 maart 1980 te Antwerpen. Voor een meer gedetailleerde uiteenzetting zie nr. 24 van 'Wiskunde en Onderwijs', tijdschrift van de V.V.W.L., blz. 537-573.

Deze situatie leidt tot het begrip: *niet-georiënteerde hoeksector.*
2.2 De soldaat moet met een kijker de te bewaken zone afspeuren. Daartoe draait hij de kijker van de ene weg naar de andere. Zie figuur 2.

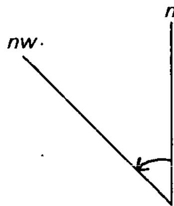


Figuur 2

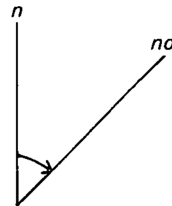
Deze situatie leidt tot het begrip: *georiënteerde hoeksector.*
2.3 Het meest bekende intuïtieve hoekbegrip is de tweebeen. Men kan dit begrip demonstreren met behulp van een passer. Zie figuur 3.
Deze situatie leidt tot het begrip: *niet-georiënteerde hoek.*



Figuur 3

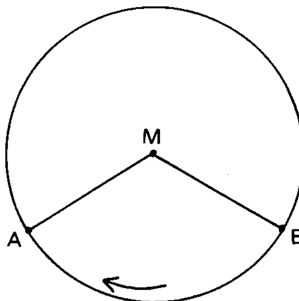


Figuur 4a



Figuur 4b

2.4 Om richtingen op aarde te bepalen kan men uitgaan van de richting noord. Om vandaar te komen tot de richting noordwest moet men naar links draaien. Om te komen tot de richting noordoost draait men naar rechts. Zie figuur 4a en 4b.
Deze situatie leidt tot het begrip: *georiënteerde hoek.*
2.5 Een toeschouwer volgt vanuit het middelpunt van een cirkelvormige baan een wielerwedstrijd. Op een gegeven moment is de situatie zoals weergegeven in figuur 5. A en B stellen de wielrijders voor; de pijl is de rijrichting.



Figuur 5

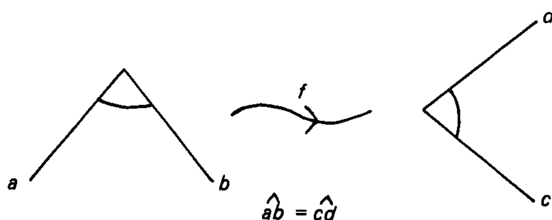
Om te weten of A voor is of B en hoeveel moeten we de gehele voorgeschiedenis kennen.

Deze situatie leidt tot het begrip: *georiënteerde omwentelingshoek*.
2.6 Een fietser duwt zijn fiets 10 m voorwaarts en vraagt: over welke hoek is mijn achterwiel gedraaid?
Deze situatie leidt tot het begrip: *niet-georiënteerde omwentelingshoek*.

3 De gelijkheidsrelatie

Of we nu voor de hoekdefinitie gebruik maken van sectoren, tweebenen of bogen toch moeten we steeds kunnen vaststellen wanneer twee hoeken gelijk zijn. Daartoe definiëren we dan een gelijkheidsrelatie die we meestal beschrijven als het in elkaar kunnen overvoeren van de gebezigde termen door middel van een gepaste transformatie. Vormen deze transformaties voor het samenstellen een groep dan is de zo gedefinieerde relatie een equivalentierelatie waarvan de equivalentieklassen de hoekgrootten of kortweg de hoeken opleveren.

Elke concrete term (figuur) representeert dan precies één klasse (hoek).



Figuur 6

Welke transformatiegroep zullen we kiezen? In aanmerking komen:
a de samenstellingsgroep van de isometrieën
b de samenstellingsgroep van de directe isometrieën
c de samenstellingsgroep van de gelijkvormigheden
d de samenstellingsgroep van de directe gelijkvormigheden.
a en c leveren het begrip niet-georiënteerde hoek op;
b en d leveren het begrip georiënteerde hoek op.
a en b hebben het voordeel dat deze transformaties het duidelijkst suggereren, dat de hoeken onveranderd blijven. Ze hebben echter het nadeel, dat de implicatie
als f een (directe) isometrie is, dan bewaart f de gelijkheid van (georiënteerde) hoeken
niet omkeerbaar is.
Bij c en d is de overeenkomstige implicatie wel omkeerbaar.
De volgende stelling is namelijk eenvoudig te bewijzen:
Elke permutatie f van het vlak die de gelijkheid van (georiënteerde) hoeken bewaart, is een (directe) gelijkvormigheid.

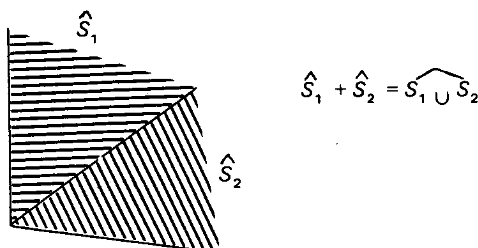
4 De algebraïsche structuur

Uit elementaire meetkundige eigenschappen zoals bijvoorbeeld die van de som van de hoeken van een driehoek, blijkt reeds dat een optelling op de verzameling van de hoeken nodig is.

Hoe definiëren we het best deze optelling in het licht van de gewenste eigenschappen?

4.1 Som van sectorhoeken

Om de hoeken van twee gegeven hoeksectoren $\hat{s}_1$ en $s-_2$ op te tellen kiezen we representanten die aanliggend zijn, d.w.z. die één been gemeen hebben en waarvan de binnengebieden disjunct zijn. De som is dan de hoek met als representant de vereniging van $\hat{s}_1$ en $\hat{s}_2$.

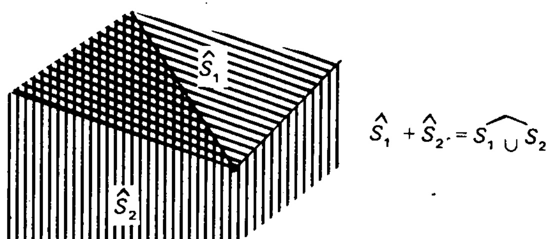


Figuur 7

Deze definitie heeft verscheidene nare consequenties. Bijv.

a de som van twee hoeken is niet altijd gedefinieerd
b elke van 0 verschillende hoek heeft slechts een eindig aantal natuurlijke veelvouden
c de som van de hoeken van een vijfhoek bestaat niet
d $(7 - 5)\hat{s} = 7\hat{s} - 5\hat{s}$ is niet algemeen geldig, want het is mogelijk dat het linker lid wel en het rechter geen betekenis heeft.

We kunnen aanliggend ook omschrijven als één been gemeen hebben en binnengebieden die elkaar niet omvatten.



Figuur 8

In figuur 8 is dus $\hat{s}_1 + \hat{s}_2$ gelijk aan de volle hoek.

Ook deze definitie geeft narigheid. Bijv.

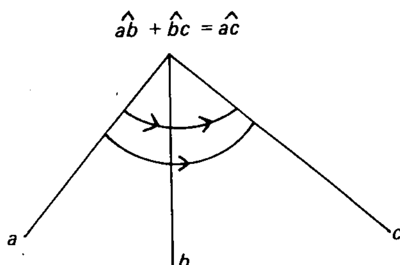
a de volle hoek is de grootste hoek en dus absorberend element van de optelling
b de vergelijking $2\hat{x}$ = de volle hoek heeft oneindig veel oplossingen
c uit $\hat{x} + \hat{y} = \hat{x} + \hat{z}$ volgt niet noodzakelijk $\hat{y} = \hat{z}$
d de rij van de natuurlijke veelvouden van elke van 0 verschillende hoek convergeert tot de volle hoek
d de som van de hoeken van een vijfhoek is gelijk aan de som van de hoeken van een vierhoek.

Dergelijke definities zijn voor de gestelde doelen dan ook niet opportuun.

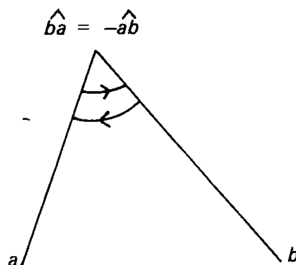
4.2 Som van georiënteerde hoeken

Om de georiënteerde hoeken van twee gegeven tweebenen op te tellen gaan we te werk op een wijze zoals we vectoren optellen.
We kiezen namelijk representanten zo, dat het tweede been van de eerste representant samenvalt met het eerste been van de tweede. We definiëren dan:

Uit de definitie volgt, dat



Figuur 9



Figuur 10

De verzameling van de georiënteerde hoeken noemen we H.
Voor het vervolg is het nuttig te weten, dat isomorf zijn:
a de optelgroep van de georiënteerde hoeken (H, +)
b de samenstellingsgroep van de rotaties met een zelfde centrum $(R_o, \circ)$
c de vermenigvuldigingsgroep van de complexe getallen met modulus 1 $(\mathbb{C}^1, \cdot)$
de vermenigvuldigingsgroep van de matrices van de vorm $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ met determinant gelijk aan 1.

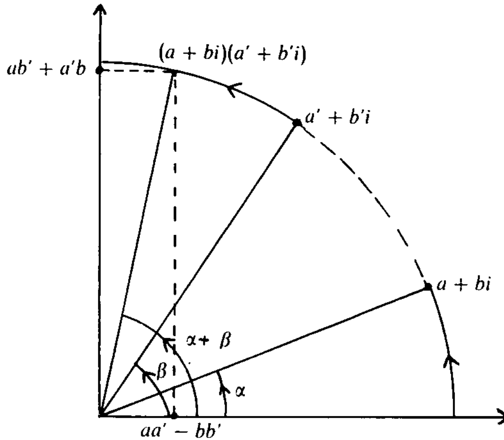
Deze isomorfieën vinden hun weerslag in de overeenkomst tussen de volgende formules:

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + a'b \\ -ab' - a'b & aa' - bb' \end{pmatrix}$$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ en
$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \cos\beta \sin\alpha$

Vgl. figuur 11.



Figuur 11

4.3 De niet-geordende module van de georiënteerde hoeken

In (H, +) kunnen we als volgt de gehele veelvouden van een element definiëren:
$3\hat{r} = \hat{r} + \hat{r} + \hat{r}$
$(-2)\hat{r} = (-\hat{r}) + (-\hat{r})$
Deze vermenigvuldiging heeft de volgende eigenschappen:
$\forall z \in \mathbb{Z}, \forall \hat{r} \in \mathrm{H}: z\hat{r} \in \mathrm{H}$
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \forall \hat{r} \in \mathrm{H}: (z_1 + z_2)\hat{r} = z_1\hat{r} + z_2\hat{r}$
$\forall z \in \mathbb{Z}, \forall \hat{r}, \hat{s} \in \mathrm{H}: z(\hat{r} + \hat{s}) = z\hat{r} + z\hat{s}$
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}, \forall \hat{r} \in \mathrm{H}: (z_1 + z_2)\hat{r} = z_1\hat{r} + z_2\hat{r}$
$\forall \hat{r} \in \mathrm{H}: 1 \cdot \hat{r} = \hat{r}$

Dit wil zeggen dat (H, +, ·) een moduul is.
(In een vectorruimte (V, +, ·) is een vermenigvuldiging gedefinieerd van een scalair met een vector. Deze scalair is element van een lichaam, meestal $\mathbb{R}$. Voor een module gelden dezelfde axioma's als voor een vectorruimte. De vermenigvuldiging is weer gedefinieerd van een scalair met een vector. Maar deze scalair is nu element van een ring. Deze ring is hier $\mathbb{Z}$.)

Het is niet mogelijk een totale orderelatie in (H, +) te definiëren die verenigbaar is met de optelling, d.w.z. waarvoor geldt

$$\hat{r}_1 > \hat{r}_2 \Rightarrow \hat{r}_1 + \hat{s} > \hat{r}_2 + \hat{s}$$

Bewijs. We weten dat er een hoek $\hat{r}$ is waarvoor

$$\hat{r} \neq 0 \text{ en } 2\hat{r} = 0$$

Zou bovengenoemde ordening mogelijk zijn, dan zou

$$\hat{r} > 0 \Rightarrow \hat{r} + \hat{r} > 0 + \hat{r} \Rightarrow 0 > \hat{r}$$

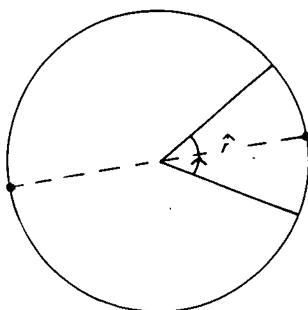
en

$$0 > \hat{r} \Rightarrow 0 + \hat{r} > \hat{r} + \hat{r} \Rightarrow \hat{r} > 0$$

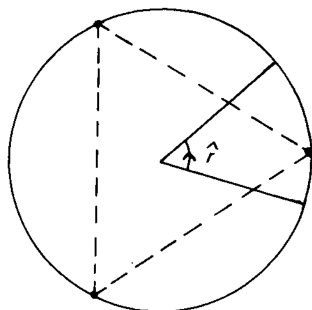
Dit is strijdig.

4.4 De n verschillende n-de delen van een hoek

Bedenk dat de vergelijking $n \cdot \hat{x} = \hat{r}$ in (H, +) net zoveel oplossingen heeft als de vergelijking $x^n = c$ in $(\mathbb{C}^1, \cdot)$ d.w.z. n verschillende oplossingen. Deze kunnen we representeren door de hoekpunten van een regelmatige n-hoek.
In figuur 12a zijn de beide oplossingen van $2\hat{x} = \hat{r}$ getekend en in figuur 12b de drie oplossingen van $3\hat{x} = \hat{r}$.



Figuur 12a



Figuur 12b

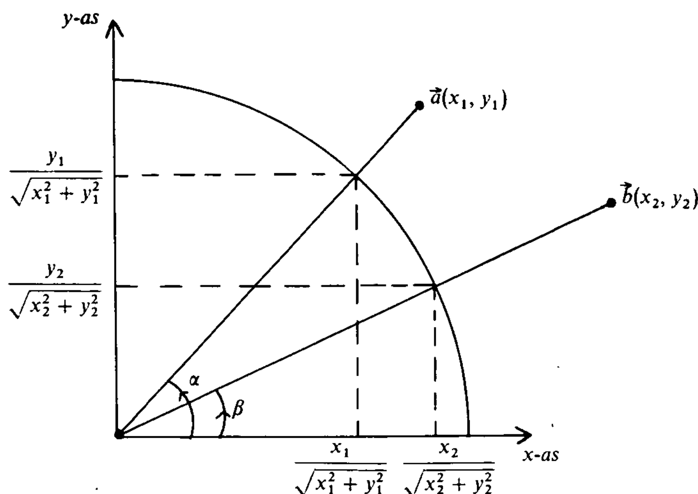
Omdat geen ordening gedefinieerd is, is het niet mogelijk één van deze twee resp. drie verkregen oplossingen *de* helft resp. *het* derde deel van $\hat{r}$ te noemen.

Zo zien we dat het niet mogelijk is $\frac{\hat{r}}{n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ te definiëren.

Dit heeft fatale gevolgen voor het werken met de gradenboog. We kunnen een hoek als hoekeenheid kiezen. Daarna is het alleen maar mogelijk van sommige hoeken vast te stellen dat ze gelijk zijn aan een geheel aantal keren de gekozen eenheid. Onderverdeling van de eenheid is niet mogelijk en zo is het niet mogelijk hoeken die geen geheel aantal keren de eenheid zijn, in de eenheid uit te drukken. En wie als eenheid wil nemen de graad en deze wil definiëren als het 180e deel van een gestrekte hoek, komt bedrogen uit.
Het is niet mogelijk in (H, +) een deling door een positief geheel getal te definiëren. Daarmee vervalt ook de mogelijkheid een vermenigvuldiging te definiëren met een rationaal getal dat niet geheel is.
Dit betekent dat de module (H, +, ·) niet te verfijnen is tot een vectorruimte over de rationale of de reële getallen.

5 Hoeken in het georiënteerde Euclidische vlak

Zijn $\vec{a}(x_1, y_1)$ en $\vec{b}(x_2, y_2)$ gegeven t.o.v. een orthonormale basis van het vlak $\prod$. en stellen we de hoek met de x-as bepaald door $\vec{a}$ gelijk aan α en deze door $\vec{b}$ gelijk aan β.



Figuur 13

Nu vertolken de formules

$$\cos(\overrightarrow{a, b}) = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\sin(\overrightarrow{a, b}) = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha =$$

$$= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

de optelgroep van de hoeken.

Definiëren we

$$f(\overrightarrow{a, b}) = [x_1\ y_1] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

en

$$g(\overrightarrow{a, b}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

dan is f een definiet positieve, symmetrische bilineaire vorm over het vlak dat dit vlak inricht tot een Euclidische ruimte, en g een alternerende bilineaire vorm over het vlak dat dit vlak oriënteert wegens $g(\overrightarrow{\vec{a},\vec{b}}) = -g(\overrightarrow{\vec{b},\vec{a}})$.
De formules (1) en (2) worden dan:

$$\cos(\overrightarrow{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{f(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{f(\vec{a},\vec{a})}\cdot\sqrt{f(\vec{b},\vec{b})}} \quad \text{en}$$

$$\sin(\overrightarrow{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{g(\vec{a},\vec{b})}{\sqrt{f(\vec{a},\vec{a})}\cdot\sqrt{f(\vec{b},\vec{b})}}$$

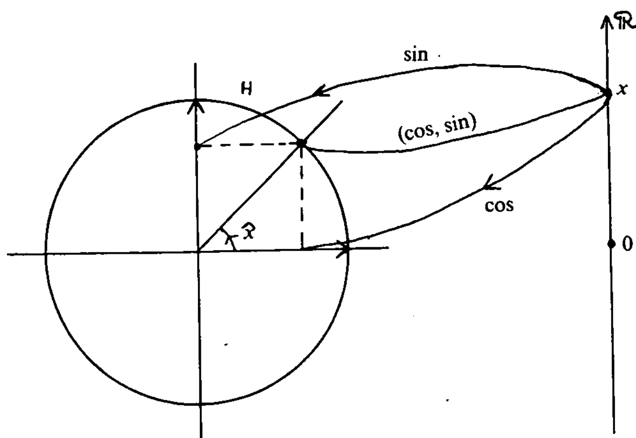
Hieruit blijkt dat cos alleen afhangt van f, terwijl sin afhangt van f en g. Dit betekent dat voor de definitie van cos de oriëntatie van het vlak niet nodig is, voor sin echter wel. Deze oriëntatie betekent niet dat de hoeken bepaald worden door koppels tweebenen (oa, ob) waarin een eerste been en een tweede been is bepaald, maar dat deze tweebenen in twee verschillende klassen, de positieve en de negatieve, worden onderverdeeld.
Het georiënteerd zijn van de hoeken heeft dus niets te maken met het georiënteerd zijn van het vlak waarin ze beschouwd worden.
De hoeken kunnen in dit vlak nu opgevat worden als klassen van koppels $(\overrightarrow{\vec{a},\vec{b}})$ waarvoor de formules (1) en (2) twee aan twee gelijke resultaten opleveren.
In de georiënteerde Euclidische ruimte van het vlak $(\prod_0, +, f, g)$ kan het rekenen met hoeken dus vervangen worden door louter algebraïsch rekenwerk op getallen met behulp van de bilineaire vormen f en g.

6 Het meten van hoeken, alias de goniometrie

In de reële analyse is het noodzakelijk de cosinus- en de sinusfunctie als domein de verzameling van de reële getallen te geven. Hierbij is het nuttig hoeken aan reële getallen te verbinden zò dat de optelling hierbij eerbiedigd wordt en bovendien $\cos x = \cos\hat{x}$ en $\sin\hat{x} = \sin\hat{x}$ (3); want aldus kunnen de formules geldig voor hoeken omgezet worden in deze voor getallen. Wat we nodig hebben is dus een (homo)morfisme tussen de modulen $(\mathrm{H}, +, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
Bestaat er een dergelijk morfisme in de zin $\mathrm{H} \rightarrow \mathbb{R}$?
Voor een dergelijke afbeelding moet dan gelden:

$$f(\hat{x}) = x \text{ en } f(\hat{y}) = y \Rightarrow f(\hat{x} + \hat{y}) = x + y$$

Dit lukt natuurlijk niet. Er is immers wel een element $\hat{x} \in \mathrm{H}$ waarvoor $\hat{x} + \hat{x} = 0$, maar geen element $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $x + x = 0$. We proberen het daarom andersom.
Bestaat een dergelijk morfisme in de zin $\mathbb{R} \rightarrow \mathrm{H}$?
Wegens de eis onder (3) moet dit dan van de volgende vorm zijn



Figuur 14

Dit is de vorkfunctie (cos, sin) van de parameterfuncties sin en cos, die overeenstemt met de afbeelding $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^1 : x \rightarrow \cos x + i \sin x = e^{ix}$ die wel degelijk een morfisme is van $(\mathbb{R}, +)$ op $(\mathbb{C}^1, \cdot)$.

We kunnen echter deze afbeelding met louter algebraïsche middelen niet construeren. Immers het bestaan van de ene parameterfunctie heeft de differentieerbaarheid en a fortiori de continuïteit van de andere tot gevolg zodat de vorkfunctie niet anders kan dan continu zijn. Dat de topologie hier onvermijdelijk is ligt aan de natuur van de groepen $(\mathbb{R}, +)$ en $(H, +)$ die topologische groepen zijn, meer bepaald Lie-groepen, waarvan de morfismeëigenschappen verbonden zijn met continuïteitseigenschappen. Loont het de moeite om hiervoor op de analyse te wachten? Zijn we gered met een morfisme tussen de modulen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ en $(H, +, \cdot)$?

Bekijken we enkele opgaven uit de goniometrie en hun gebruikelijke oplossingen.[1])

1 $\cos 2x = 0{,}5 \Leftrightarrow 2x = \pm 60° + k \cdot 360° \Leftrightarrow x = \pm 30° + k \cdot 180°$
Bedenk dat 60° een hoek is en geen reëel getal!
We rekenen klaarblijkelijk met hoeken als met objecten van een vectorruimte (want we delen door 2) terwijl we toch weten dat $(H, +, \cdot)$ geen vectorruimte is!

2 $\sin x/4 = 0 \Leftrightarrow x/4 = k \cdot 180° \Leftrightarrow x = k \cdot 720°$
Nu is in H toch wel 720° = 360° = 0° maar 360° is klaarblijkelijk geen oplossing van $\sin x/4 = 0$ terwijl 0° en 720° dit wel zijn. Het is duidelijk dat de hoeken die we hier beschouwen geen elementen van H zijn.

3 $\tan(x - 45°) < \sqrt{3} \Leftrightarrow x - 45° \in \{a + k \cdot 180° \mid -90° < a < 60°\}$
$x \in \{b + k \cdot 180° \mid -45° < b < 105°\}$

1 Voor de vernieuwing van ons onderwijs was in Nederland deze methode gebruikelijk. Misschien gebeurt het incidenteel nog wel. De schrijver demonstreert hier, dat onze vroegere methode essentieel fout was. Een verrassend gezichtspunt. (Red.)

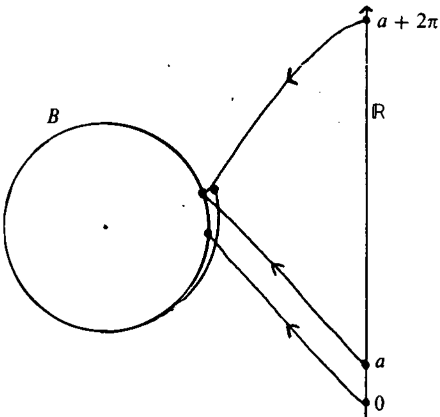
We rekenen met de hoeken hier als met elementen van een geordende groep terwijl H deze structuur niet heeft.

Welke zijn nu deze soort hoeken waarmee we in de goniometrie rekenen zoals in een geordende vectorruimte en op welke wijze zijn zij verbonden met de georiënteerde hoeken?

7 Omwentelingshoeken

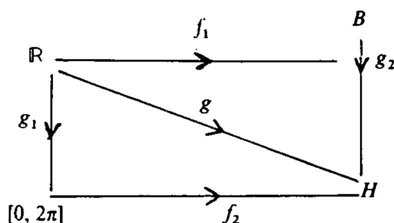
Uiteraard kan ($\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$) opgevat worden als een geordende vectorruimte. Wat gaat er nu fout als we $\mathbb{R}$ op H afbeelden en hoe komt het dat we daar deze vectorruimtestructuur niet terugvinden? Bedenk dat twee punten op een cirkel oneindig vele omwentelingsbogen (omwentelingshoeken) bepalen die onderling verschillen door het aantal beschouwde volledige omwentelingen en hun doorloopzin, de klasse van al deze bogen (hoeken) is dan op te vatten als de georiënteerde hoek bepaald door die twee punten.

Bij deze quotiëntvorming ontstaat echter structuurverlies met betrekking tot de vermenigvuldiging met niet-gehele scalaren en het verenigbaar zijn van de orde met de optelling. Willen we dit structuurverlies niet lijden dan is het nodig de cirkel op te vatten als een opgerolde rechte waarvan de elementen de omwentelingsbogen (-hoeken) zijn, we noteren deze laatste verzameling als **B**.
De functie (cos, sin) wordt hierbij dan opgevat als een bijectieve opwindfunctie die de geordende vectorruimtestructuur van de reële getallen overdraagt op de omwentelingsbogen. Het is in deze structuur dat we de problemen uit de goniometrie oplossen.



Figuur 15

We verkrijgen dan het volgende schema



Hierin is f_1 een isomorfisme van geordende vectorruimten, f_1^{-1} de boog- of hoekmaat, f_2 een isomorfisme van modulen en g, g_1 en g_2 morfismen van modulen.

8 Slot

Is het niet steeds mogelijk de leerlingen wiskundig volmaakte begrippen aan te bieden dan zouden we toch eerder onvolledigheid dan wel onjuistheid moeten verkiezen. Het is voor de student niet alleen verwarrend maar ook ontmoedigend telkens in een volgend stadium de tegenspraken met het vóorgaande stadium te moeten vaststellen.

Ik dank hierbij ook graag Piet Vredenduin die de ondankbare taak op zich heeft willen nemen om het oorspronkelijke artikel van 38 pagina's te reduceren tot deze versie en daarbij ook nog heeft bijgedragen tot talrijke tekstverbeteringen.

Naschrift van de redactie
De niet-georiënteerde hoeken (uit 2.3) zijn in dit artikel niet ter sprake gekomen. Voor het onderwijs in de onderbouw in Nederland zijn ze van speciaal belang. Vandaar dat in een recreatieopgave in dit nummer gevraagd wordt zich er een mening over te vormen. In het volgende nummer vindt u twee mogelijke uitwerkingen.

Over de auteur:
Rik Verhulst is sinds 1959 werkzaam als leraar wiskunde aan de katholieke normaalschool voor onderwijzers en regenten, Pius-X instituut, te Antwerpen. Hij is auteur, in samenwerking met anderen, van de serie schoolboeken 'Wis en Kundig' en van 'Wiskundig Leerpakket' en medewerker bij de recyclage van leraren in het kader van het Belgisch Centrum voor Metodiek van de Wiskunde en van de Vliebergh-Sensie leergangen van de K.U. Leuven.

Jaarrede 1981

Dames en Heren,

Aan het begin van deze jaarrede wil ik allereerst met u stilstaan bij het overlijden in januari van Ben Verdouw. Hoewel hij wel eens op een jaarvergadering is geweest zullen weinigen hem gekend hebben. Hij was geen lid van onze vereniging. Maar zijn verdiensten voor de vereniging zijn zeer groot. Gedurende tien jaren heeft hij de ledenadministratie van de vereniging verzorgd. De bestuursleden en vooral de penningmeester, die zeer nauw met hem samenwerkte, missen in hem niet alleen een nauwgezet en geïntereseerd medewerker, maar vooral een vriend.

Het eindexamen is, hoewel geen einddoel, voor velen jaarlijks een toetssteen. Zowel het intellect en de menselijkheid van de CEVO, alsook de capaciteiten van onze leerlingen, ja zelfs soms ons eigen lesgeven staan na het eindexamen ter discussie.
Ook dit jaar rijzen er weer vele vragen. Was er nu een fout in de eerste opgave van het tweede tijdvak wiskunde II? Moest er zo'n enorme cesuurverschuiving in het eerste tijdvak wiskunde I en wiskunde mavo-4 plaats vinden? Is het dan rechtvaardig dat deze cesuurverschuiving bij het tweede tijdvak niet plaats vond? Betreffende het examen wiskunde II is het evident dat opgave 1c een fout bevat, maar het bestuur is van mening dat het onwaarschijnlijk is dat de kandidaten hiervan de dupe zijn geworden. Het bestuur vindt dat, indien een kandidaat in dit of in eventuele komende gevallen aantoonbaar of vermoedelijk gedupeerd is, men met de inspectie contact moet opnemen om tot een bevredigende oplossing voor de kandidaat te komen.
Over de cesuurverschuiving zijn de meningen in den lande zeer verdeeld. Sommigen menen dat, gezien de door de leerlingen behaalde resultaten, het werk te moeilijk was, zodat een behoorlijke cesuurverschuiving op zijn plaats was. Anderen hebben echter juist tegen deze cesuurverschuiving hun bezwaren. Diverse collega's vinden dat het werk voldeed aan eisen die men aan een vwo-leerling kan stellen. Men zal steeds moeten blijven bedenken dat een diploma toegang biedt tot vervolgopleidingen en dat de exameneisen zò moeten blijven dat deze opleidingen de leerlingen op basis van hun diploma kunnen blijven ontvangen.
Betreffende de cesuur bij het tweede tijdvak meent het bestuur dat het moeilijk is voor de CEVO om aan de hand van de resultaten van kandidaten, die in de regel herkansen omdat het eerste tijdvak teleurstellend of alleen maar onvoldoende was conclusies over de moeilijkheidsgraad te trekken. Echter, als de commissie de bedoeling had om gelijkwaardige werken voor het eerste en tweede tijdvak te maken en het eerste tijdvak wordt als te zwaar beoordeeld, is er een redelijke aanleiding zich over de cesuur van het tweede tijdvak te bezinnen.
Vorig jaar deelde ik u mede dat het, gezien de toestand van 's Rijks financiën, niet meer mogelijk is docenten uit te nodigen om, tegen betaling, examenopgaven in

te zenden. Hiermee is echter de invloed vanuit het veld niet geheel verdwenen. Vermoedelijk is u reeds bekend dat per 1 augustus van dit jaar de CVO is opgegaan in de CEVO, waardoor een grotere samenhang kan ontstaan tussen de examens avo en beroepsonderwijs. In de CEVO is nu ook onze vereniging vertegenwoordigd door een docent uit havo/vwo en een docent uit het mavo. Hiernaast zal in de toekomst aan docenten de mogelijkheid geboden worden te solliciteren naar een plaats in een van de Advies Commissies Docenten.

Uiteraard verwacht u van mij dat ik niet alleen problemen, maar ook ontwikkelingen aan u mededeel. Daarom allereerst het HEWET-project.
Zoals in de vorige jaarrede reeds is aangekondigd, is dit schooljaar het zogenaamde HEWET-project van start gegaan. Op twee scholen, te weten de Lorentz Scholengemeenschap in Haarlem en het Liemers College in Zevenaar, heeft men in de vijfde klas één groep leerlingen die in plaats van wiskunde I het vak wiskunde A in hun pakket hebben. Deze leerlingen zullen in 1983 in de gelegenheid gesteld worden in dat vak examen af te leggen, waarna zij – uiteraard na slagen voor hun eindexamen – toegang hebben tot de studie in de vakken economie, pedagogische en andragogische wetenschappen, politicologie, psychologie, sociologie en sociale geografie. De ervaringen met de nieuwe leerstof in de klas zijn tot dusverre bemoedigend, maar de experimenteerfase is nog te pril om daar al conclusies aan te verbinden. Over het HEWET-project zullen regelmatig publikaties verschijnen in de Nieuwe Wiskrant en wat minder regelmatig in Euclides.
Ten behoeve van dit experiment heeft het departement een begeleidingscommissie ingesteld, bestaande uit Prof. Van der Blij (voorzitter), drs. De Jong (secretaris en de inspectie vertegenwoordigend), Prof. Molenaar (deskundige op het gebied van de toegepaste wiskunde, speciaal in de sociologische wetenschappen), drs. Van Dormolen (wiskunde-didacticus), dr. Van Lint (wiskundeleraar) en drs. Riel (namens het departement, afd. VO/AV). Zij zullen de medewerkers aan het HEWET-project, de heren Kindt, De Lange en Vonk, met raad en daad bijstaan. Genoemde begeleidingscommissie heeft de minister geadviseerd omtrent de aanwijzing van de tien scholen die in de volgende fase – te beginnen in het schooljaar 1983/1984 – aan het experiment zullen deelnemen. De namen van de scholen zullen binnenkort worden bekend gemaakt. De docenten van deze tien scholen zullen tot de zomer van 1983 in de gelegenheid worden gesteld om deel te nemen aan een experimentele nascholingscursus.
Het doel van deze cursus is tweeledig:
- Het voorbereiden van de leraren van die scholen op het werken met de nieuwe leerstof,
- het ontwikkelen van een nascholingscursus die te zijner tijd op grote schaal zal worden gegeven.

Het bestuur hoopt en verwacht dat de nu gestarte ontwikkelingen een belangrijke verbetering van het wiskunde-onderwijs tot gevolg zullen hebben en zij wenst alle betrokkenen in de komende jaren succes toe.

Vorig jaar heb ik reeds melding moeten maken van de plannen van de Staatssecretaris om het aantal zittingen van het eindexamen wiskunde bij het lbo

en het mavo van twee op één te brengen. Via een ministeriële circulaire is inmiddels vast komen te staan dat dit met ingang van het schooljaar 1984/1985 inderdaad gebeurt.
Het bestuur heeft een werkgroep ingesteld, onder leiding van de heer Mahieu, die tot taak heeft gekregen om de problematiek te bestuderen die samenhangt met het zo effectief mogelijk benutten van de examentijd. De werkgroep heeft verslag uitgebracht aan het bestuur. Bij haar studie is zij uitgegaan van het principe dat examens op geen enkele wijze een nadelige invloed mogen uitoefenen op het onderwijs. Zulke nadelige invloeden zouden er bijvoorbeeld ontstaan als gebruik gemaakt zou worden van één bepaalde vraagvorm, of als er elk jaar eenzelfde soort opgaven zouden worden gebruikt. Daarom acht de werkgroep het raadzaam om in allerlei opzichten zo gevarieerd mogelijk te examineren, zowel ten aanzien van de te verwerken examenstof als ten aanzien van de te gebruiken vraagvormen. Om de ideeën zo goed mogelijk gestalte te geven is het verslag voorzien van een groot aantal voorbeelden. Het bestuur zal dit verslag aanbieden aan de CEVO.

Vorig schooljaar heeft de didactiekcommissie de publikatie *Rekening houden met individuele verschillen* het daglicht laten zien. Deze publikatie is een groot succes. Op zaterdag 13 febuari 1982 zal er een studiedag worden gehouden met als uitgangspunt deze publikatie. Het is de bedoeling dat eigen ervaringen worden uitgewisseld en besproken. Het boek dient hierbij als referentiekader. Centraal staat het leren van de ingebrachte ervaringen.
De studiedag wordt zo ingericht dat men 's morgens en 's middags kan kiezen uit vijf onderwerpen, zoals leerstijlen, motivatie, proefwerken, werkvormen, sectie-overleg. Het bestuur hoopt dat velen op deze studiedag aanwezig zullen zijn.

Tot vorig jaar moest ik jaarlijks spreken over de onzekere toekomst van het IOWO. Inmiddels is het IOWO helaas op 1 januari opgeheven. Hiervoor in de plaats is een vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computer-centrum gekomen. Wij wensen de medewerkers aan dit OW & OC veel succes.
Andere ontwikkelingen in het onderwijs voor onszelf, de zogenaamde nascholingscursussen, kan ik hier vermelden.
Het 'Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde' gaat ondanks de vele problemen dóór met het organiseren van nascholingscursussen. Inmiddels is het 'Nederlands Genootschap Opleiding Leraren bij het Beroepsonderwijs' onlangs uitgenodigd om tot het werkverband toe te treden. Ook met de Pedagogische Centra zal contact gezocht worden. Het Werkverband heeft het afgelopen verenigingsjaar A-cursussen in conferentievorm gegeven, en wel in november, februari en maart. Vanwege de financiële perikelen was het Werkverband van plan de A-cursus voortaan niet meer in conferentievorm aan te bieden, maar regionaal op de lerarenopleidingen. Helaas is dit geen succes geworden door een te geringe belangstelling. Nu is het Werkverband van plan in het cursusjaar 1982/1983 de A-cursussen weer in conferentievorm aan te bieden. Zolang de financiën dit toelaten zullen er nog wel B- en C-cursussen in conferentievorm georganiseerd kunnen worden. Op dit moment wordt er een B-cursus gegeven te Ede. Het Werkverband denkt verder nog aan een B-cursus in februari en een C-

cursus in de maanden november en maart.
Van de overige nascholingscursussen ondervindt alleen computerkunde veel belangstelling. De andere aangeboden cursussen moeten vaak vervallen vanwege gebrek aan belangstelling. Wel worden er nog cursussen aan secties van scholen gegeven door ULO's en NLO's.

Op 1 januari 1979 is de uitvoering van het Nederlandse aandeel in het 'Tweede Wiskunde Project' van de 'International Association for the Evaluation of Educational Achievement' officieel van start gegaan.
De uitvoering van dit project wordt met name mogelijk gemaakt door financiële ondersteuning door de 'Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs' en inhoudelijke ondersteuning door een nationale begeleidingscommissie, een werkcommissie van wiskundeleraren en een interne commissie van de Technische Hogeschool Twente. Nadat in 1962/1963 het eerste internationale vergelijkende onderzoek van het wiskunde-onderwijs was uitgevoerd besloot de IEA in 1975 de huidige Second Mathematics Study op te zetten. In het internationale vooroverleg, dat plaats vond in 1975/1976 werden de grote lijnen van het onderzoek uitgezet. Pas in januari 1979 werd het Nederlandse projectteam samengesteld, omgedoopt tot Nationale Begeleidingscommissie.
Inmiddels is het onderzoek in volle gang. Er zijn 170 scholen bij betrokken (54 vwo/havo, 171 mavo, 25 lto en 20 lhno). In december 1980 en januari 1981 zijn de aselect gekozen scholen geïnformeerd over het onderzoek met de uitnodiging om deel te nemen. Op 15 februari 1981 bleken de meeste scholen positief gereageerd te hebben (60 à 70%). De scholen hebben de vragenlijsten reeds ingevuld en geretourneerd. Men is nu bezig met verwerking van de gegevens.
In december 1980 is in Parijs uitvoerig ingegaan op de internationale vooruitgang van het project. De volgende vergadering is voor december 1981 gepland in Urbana, Illinois. Deze bijeenkomst zal dan voornamelijk gewijd zijn aan de analyse en interpretatie van de verzamelde gegevens, evenals de rapportage daarover.

Diverse onderwerpen worden in de rondvraag aan de orde gesteld omdat ze niet in de jaarrede zijn opgenomen, of zijn niet in de jaarrede opgenomen omdat ze toch in de rondvraag naar voren komen, maar voor één onderwerp wil ik dit jaar een uitzondering maken. Jaarlijks krijgt u in de rondvraag het verzoek van de heer Pot om mee te leven met, mee te denken over en mee te werken aan het u allen welbekende tijdschrift voor onze leerlingen – en onszelf – Pythagoras. Wij proberen zelf in onze lessen bij onze leerlingen niet alleen kennis van maar ook enthousiasme voor wiskunde bij te brengen en juist bij dit bijbrengen van enthousiasme kunnen we ons erg laten steunen door het tijdschrift Pythagoras. Daarom wil ik dit jaar de heer Pot vóór zijn en namens het gehele bestuur u uitnodigen u in te zetten voor verspreiding en zo mogelijk vulling van dit tijdschrift.

Ten slotte mag ik u nog mededeling doen van een wijziging van de functies binnen het bestuur. Nadat Joop van Dormolen 16 jaren penningmeester van onze vereniging is geweest wordt met ingang van dit verenigingsjaar de functie van

penningmeester vervuld door Felix Gaillard.
Zestien jaar is Joop onze penningmeester geweest, waarvan hij de eerste zes jaren ook de gehele ledenadministratie zonder enige hulp voerde. Vijftien keer heeft de ledenvergadering hem kunnen déchargeren en naar alle waarschijnlijkheid straks voor de zestiende keer. Soms hebben enige van de leden, hard rekenend een fout in de jaarrekening kunnen vinden, maar nooit heeft Joop dan verteld dat zijn enige fout was dat hij een te groot vertrouwen had gehad in degene die de goede cijfers fout had overgetypt. Voor het vele werk als penningmeester verricht wil ik Joop heel hartelijk danken. Gelukkig blijft hij in het bestuur zodat we hopelijk nog lang kunnen genieten van het overige vele werk dat hij voor de vereniging doet.
Voor Felix is het niet prettig te moeten opboksen tegen een reputatie van zo'n voorganger, doch wij hebben er het volste vertrouwen in dat hij er in zal slagen zijn voorganger te evenaren.
Joop, bedankt en Felix, succes.

Th. J. Korthagen, voorzitter.

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 31 oktober 1981 in het gebouw van de S.O.L. te Utrecht.

Om 10.18 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom het erelid P. Vredenduin, de inspecteur B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars F. Laforce, A. Schoeters en mevr. G. Simons, de vertegenwoordiger van Euclides, B. Zwaneveld, de vertegenwoordiger van Wolters-Noordhoff, D. Soeteman en de oud-inspecteur N. Zimmerman. De voorzitter wijst er op dat de heer Zimmerman, na vele jaren als inspecteur aanwezig geweest te zijn, nu ook als oud-inspecteur aanwezig is. Hij vermeldt dat de adviezen van de heer Zimmerman altijd van grote waarde zijn geweest. Hierna spreekt de voorzitter de jaarrede uit.
Na de jaarrede worden de notulen van de algemene vergadering van 8 november 1980 en de jaarverslagen goedgekeurd. De penningmeester wordt gedéchargeerd. In de nieuwe kascommissie worden gekozen de heren J. A. R. van Thull uit Leiden en A. Braat uit Roozendaal. Naar aanleiding van de post commissies op de begroting voor het komende verenigingsjaar geeft de heer G. Doevendans een overzicht van de activiteiten en plannen van de didactiekcommissie. De heren Th. J. Korthagen en J. W. Maassen en mevr. N. C. Verhoef worden als bestuurslid herkozen. De contributie voor het verenigingsjaar 1982/1983 wordt vastgesteld op *f* 45,–.
Hierna geeft de voorzitter het woord aan de heer Maassen, die een inleiding geeft op de studiedag met als thema 'De microcomputer en het wiskundeonderwijs'. Na deze inleiding zijn er acht werkgroepen n.l.: Voorbeelden CAI, De computer als medium, Probleemaanpak met kleinere machines, Oefenen per computer, Leer (de essenties van) programmeren in vijf kwartier, Micro-computer bij het

economie onderwijs, Computertoepassingen in Hewet en Forum 'Computer in de school'.
Na deze werkgroepen is er een lunchpauze. Hierna houdt de heer G. Vonk een lezing met als titel: 'Wat is een micro-computer'. Vervolgens wordt er weer in de acht werkgroepen gewerkt.
Na dit themagedeelte wordt de vergadering voortgezet met het tweede deel van het huishoudelijk gedeelte.
Als agendapunt staat allereerst op het programma een wijziging van de statuten. De voorzitter deelt mee dat de statuten moeten worden aangepast aan het nieuwe Burgerlijk Wetboek. Uitgangspunt voor de nieuwe statuten zijn geweest de oude statuten en het oude huishoudelijk reglement. De vergadering gaat zonder discussie accoord met het voorstel. Slechts zal op verzoek van de heer Vredenduin in artikel 12 lid 4 de tekst 'het daarna volgende grootste aantal stemmen' vervangen worden door 'het grootste daarna volgende aantal stemmen'. De vergadering gaat er mee accoord dat voorzitter en secretaris de statuten laten wijzigen.
Als laatste onderdeel van deze dag volgt de rondvraag. De heer H. Matthijssen zegt geen convocaat voor de vergadering te hebben ontvangen en vraagt het bestuur te onderzoeken of dit vaak voorkomt. De penningmeester zegt dat na elk rondschrijven een paar kaarten als onbestelbaar terug komen terwijl het adres op deze convocaten toch juist is. Het betreft dan vermoedelijk door de post verkeerd bezorgde kaarten die door de ontvangers terug worden gezonden met de mededeling 'woont hier niet'.
De secretaris voegt hier nog aan toe dat voor de verzending van convocaten dezelfde adresstrookjes worden gebruikt als voor de verzending van Euclides, zodat degenen die Euclides ontvangen ook een convocaat moeten ontvangen. De heer J. C. J. Jimkes vraagt de aandacht voor de problemen rond versnelde correctie en cesuur bij het eindexamen. Reeds in de normenvergadering heeft hij dit probleem aan de orde gesteld. Volgens artikel 28 van het examenbesluit worden eindcijfers vastgesteld. Op grond van artikel 27 lid 7 kan hiervan worden afgeweken. Spreker is van mening dat er geen gronden zijn om artikel 27, lid 7, toe te passen. Hij wil dat men er voor zorgt dat de cesuur bekend is als men overleg pleegt met de tweede corrector. Hij is van mening dat de omzetting van score in cijfer geen administratieve handeling is. De voorzitter zegt dit met de inspectie te zullen bespreken en te zullen proberen een bevredigende oplossing te vinden.
Vervolgens vraagt de heer F. Dolmans het woord namens het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde. Hij vertelt over de activiteiten van het Werkverband en wijst op de A-, B- en C-cursussen die overgenomen zijn na de opheffing van het IOWO. In februari 1982 is er weer een B-cursus, in maart een C-cursus en in het najaar 1982 zijn er weer A-, B- en C-cursussen. Hij doet een oproep om bij belangstelling via de hiervoor bestaande kanalen voor deze cursussen in te schrijven.
Mevrouw A. Aukema-Schepel vraagt om de puntenverdeling bij het eindexamen bekend te maken. Het is voor de kandidaten in deze tijd van openheid prettig als zij reeds tijdens het eindexamen de hoofdverdeling van de punten kennen. Volgens de voorzitter zijn enige vakken, zoals oude talen, natuurkunde en

scheikunde tegen. De heer B. J. Westerhof voegt hier nog aan toe dat de kandidaten op het eindexamen verschillende pakketten hebben. Om niet verschillende kandidaten verschillend te behandelen moet men één lijn trekken. Het is een beslissing van de CEVO. Die heeft 'neen' gezegd. De heer H. Broekman zegt dat er veel argumenten voor en veel tegen zijn. Hierover kunnen wij hier niet even beslissen. De vraag is of de vereniging hierover wil nadenken en het bespreken. De voorzitter neemt het probleem mee naar het bestuur en belooft de resultaten te laten weten. Vervolgens spreekt de heer J. Sloff een woord van dank uit voor de manier waarop zijn vraag van het vorige jaar op deze dag beantwoord is.
De heer F. Laforce feliciteert de vereniging met deze dag. Het was een goede dag die met het gekozen onderwerp veel succes had. Hij meent dat de huidige economische crisis een voordeel is omdat nu de markt niet overspoeld wordt met alle mogelijke microcomputers. Hij meent dat wij de uitdaging van de microcomputer moeten beantwoorden en wenst de vereniging verder nog veel succes. De voorzitter dankt de voorbereidingscommissie van deze themadag en noemt hierbij vooral de heer G. Vonk die de leiding van de voorbereidingscommissie had. Na alle aanwezigen voor hun komst te hebben bedankt sluit de voorzitter de vergadering.

Recreatie

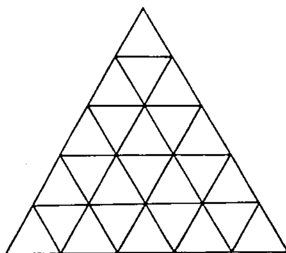
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

456. Definieer een optelling van niet-georiënteerde hoeken en ga na welke consequenties de definitie heeft. (Vgl. het artikel van Rik Verhulst elders in dit nummer.)

457. In een afgesloten vijver ligt een bootje. Daarin zit iemand die een steen bij zich heeft. Hij gooit de steen overboord. Stijgt of daalt de waterspiegel hierdoor of blijft hij onveranderd?
Zelfde vraag voor een voetbal. (J. K. Timmer)

458. Een gelijkzijdige driehoek met zijde n wordt verdeeld in congruente gelijkzijdige driehoeken met zijde 1.
Een wiskundige bladluis wil een reis maken door deze driehoekjes. Hij mag beginnen in een zelfgekozen driehoekje en steeds overgaan naar een aangrenzend driehoekje. (Twee driehoekjes heten aangrenzend als ze een zijde gemeen hebben.) Het is niet toegestaan eenzelfde driehoekje tweemaal te bezoeken.
Hoe groot is het maximale aantal driehoekjes dat op zo'n reis bezocht kan worden? (ingezonden door R. Troelstra)



Oplossingen

453. Elke week gaan vier leden van een wandelclub samen wandelen. Twee leden die een keer samen gewandeld hebben, wandelen geen enkele volgende keer weer samen. Men kan dit 20 weken volhouden, maar niet langer. Hoeveel leden heeft de club minstens?
Kan men het systeem 1 keer volhouden, dan heeft de club minstens 4 leden, 2 keer, dan minstens 7, 3 keer dan minstens 9 en 4 keer dan minstens 10. Dan kan men het zelfs ook 5 weken volhouden. De verdeling van de personen (A tot en met J) over de weken (1 tot en met 5) wordt dan

A	1	2	F	2	4
B	1	3	G	2	5
C	1	4	H	3	4
D	1	5	I	3	5
E	2	3	J	4	5

De 6e week kunnen nu A en H samen wandelen, de 7e week A en I enz. We krijgen zo

A	1	2	6	7	8
B	1	3	9	10	11
C	1	4	12	13	14
D	1	5	15	16	17
E	2	3	12	15	18
F	2	4	9	16	19
G	2	5	10	13	20
H	3	4	6	17	20
I	3	5	7	14	19
J	4	5	8	11	18

Nu moeten er nog 2 personen de 6e week meewandelen, 2 de 7e week, . . ., 2 de 20e week. Dit lukt als volgt.

K	6	10	14	16	18
L	6	11	13	15	19
M	7	9	13	17	18
N	7	11	12	16	20
O	8	9	14	15	20
P	8	10	12	17	19

Zodat het dus lukt het systeem 20 weken vol te houden, als de club 16 leden telt.

Zou 21 weken ook lukken? Dan zou er een lid zijn, dat 6 keer meeloopt. Het aantal leden is dan minstens $1 + 6 \cdot 3 = 19$, dus meer dan 16.
Als de club 15 leden of minder telt, is het dan mogelijk het systeem 20 weken vol te houden? Dan zou er een lid zijn, dat 5 keer meeloopt. Het aantal leden is dan echter minstens $1 + 5 \cdot 3 = 16$. De club telt dus minstens 16 leden.
Opmerking verdient dat elk paar leden precies één keer samen op stap gaat.
Verder kan men op vijf manieren de 16 leden in 4 disjuncte viertallen verdelen die in vier verschillende weken wandelen, nl. in de weken:

1	18	19	20
2	11	14	17
3	8	13	16
4	7	10	15
5	6	9	12

454. Elk convex veelvlak bezit minstens twee zijvlakken met hetzelfde aantal ribben.
Bewijs. Onderstel het maximale aantal ribben dat een zijvlak begrenst, is k. Kies een begrenzend k-vlak. Hieraan grenzen k zijvlakken waarvan de aantallen ribben element zijn van de verzameling $\{3, 4, \ldots, k\}$. Twee van deze zijvlakken hebben dus een gelijk aantal ribben.

455. Ga uit van (a, b), $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Pas de volgende operaties toe:
f: $(p, q) \to (p + 1, q + 1)$
g: $(p, q) \to (\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$ indien p en q even zijn
h: (p, q) en $(q, r) \to (p, r)$

a Welke geordende paren zijn bereikbaar vanuit (10, 15)?
Vanuit (10, 15) is bereikbaar (1, 6), als volgt:
$(10, 15) \xrightarrow{f} (15, 20) \xrightarrow{h} (10, 20) \xrightarrow{g} (5, 10) \xrightarrow{h} (5, 15) \xrightarrow{f} (6, 16) \xrightarrow{h} (3, 8) \xrightarrow{f} (8, 13) \xrightarrow{h} (3, 13) \xrightarrow{f}$
$\to (4, 14) \xrightarrow{h} (2, 7) \xrightarrow{f} (7, 12) \xrightarrow{h} (2, 12) \xrightarrow{h} (1, 6)$.
Vanuit (1, 6) is bereikbaar:
$(1, 6) \xrightarrow{f} (6, 11) \xrightarrow{h} (1, 11) \xrightarrow{f} (6, 16) \xrightarrow{h} (1, 16) \ldots \to (1, 1 + 5n)$
En vanuit $(1, 1 + 5n)$ is bereikbaar door middel van f: $(m, 5n + m)$. Vanuit (10, 15) zijn dus bereikbaar alle geordende paren waarvan het verschil (tweede − eerste) een 5-voud is.
Geen andere, want toepassing van f, g en h leidt steeds tot een geordend paar waarvan het verschil een 5-voud is.

b Welke geordende paren zijn bereikbaar vanuit (a, b)?
Onderstel $a < b$ en $b - a = 2^k v$ waarin v oneven is. Door herhaald toepassen van g en zo nodig f krijgen we dan een geordend paar met verschil v. Bereikbaar zijn dus alle paren met verschil v en geen andere. Analoog voor $a > b$ en $a = b$.

c De relatie 'is bereikbaar vanuit' is transitief (evident), dus ook reflexief. Want bijv. vanuit (10, 15) is bereikbaar (1, 6) en vanuit (1, 6) is bereikbaar (10, 15) dus vanwege de transitiviteit vanuit (10, 15) ook (10, 15).
Echter niet symmetrisch. Want vanuit (1, 2) is bereikbaar (1, 4) maar niet omgekeerd.

d Vanuit (1, 2) is elk geordende paar (a, b) bereikbaar met $b > a$, vanuit (2, 1) elk geordend paar met $b < a$ en vanuit (1, 1) elk geordend paar met $b = a$.
Vanuit (1, 2) en (2, 1) is (1, 1) bereikbaar en dus elk geordend paar. Meer algemeen mag men uitgaan van twee paren van de vorm $(a, a + 2^k)$ en $(b + 2^l, b)$ met $k, l \in \mathbb{N}$.

Boekbespreking

Beiträge zum Mathematikunterricht 1980, Hermann Schroedel Verlag, Hannover; 372 blz., 1980.

In deze *Beiträge* zijn resumé's gebundeld van een honderdtal inleidingen van 4 tot 7 maart 1980 gehouden aan de Pädagogische Hochschule te Dortmund, op de veertiende Bundestagung für Didaktik der Mathematik. De compacte verslagen leveren een bonte schakering van zeer uiteenlopende didactische problemen, waarbij de *Mathematik in der Hauptschule* en de *Mathematik für schulschwache Kinder* in het bijzonder accent krijgen. Ook de didactische problematiek ten aanzien van onderwerpen als waarschijnlijkheidsleer en computerkunde krijgen bij herhaling enige aandacht, evenals problemen uit de geschiedenis van de didactiek der wiskunde.
De samenstellers van het congresverslag hebben er van afgezien de voordrachten naar vakgebied enigszins te ordenen: ze volstaan met een alfabetische ordening op grond van auteursnamen.
In de vakbibliotheken van de instituten voor leraarsopleiding is een congresverslag als dit wel op zijn plaats.

Joh. H. Wansink

Mededelingen

Ter overname aangeboden:
Jaargangen Euclides
Gebonden: 16 t/m 34 (niet: 19, 22)
Niet gebonden: 43 t/m 56
Tel. 085-45 63 81.

Aanmelding examens wiskunde m.o.A en B in 1982 van de algemene commissie

De Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen
brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij, die zich in 1982 wensen te onderwerpen aan het examen m.o.A of B, af te nemen door de *Algemene Commissie*, zich uitsluitend kunnen aanmelden door het examengeld à *f*80,– vóór 1 mei 1982 over te maken op postrekeningnummer 172007 ten name van de voorzitter van de algemene examencommissie wiskunde m.o., per adres Aardbeistraat 11, 2564 TM 's-Gravenhage, met vermelding van *volledige naam en adres* van de *kandidaat* en de mededeling of men zich opgeeft voor *m.o.A* dan wel voor *m.o.B.* Na 1 mei 1982 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.
Met betrekking tot de deelexamens wordt opgemerkt, dat bij het A-examen een deelexamen twee vakken (naar keuze van de kandidaat) dient te omvatten. Bij het B-examen bestaat een deelexamen òf wel uit Analyse en Functietheorie òf wel uit de Meetkunde vakken.
De programma's zijn omschreven in het 'Nieuwe Tijdschrift voor Wiskunde' jaargang 63, aflevering 2, november 1975, blz. 86 t/m 93. Men kan deze programma's verkrijgen door storting van *f*2,– op postgironummer 172007 ten name van de voorzitter examencommissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 2564 TM 's-Gravenhage onder vermelding 'examenprogramma'.
Het schriftelijk gedeelte zowel van het A-examen als van het B-examen wordt afgenomen op donderdag 19 augustus 1982 en vrijdag 20 augustus 1982 in het Congresgebouw te 's-Gravenhage.
Staatssecretaris drs. W. J. Deetman, namens deze, A. Th. Eijsenring

Examenbesprekingen

De regionale bijeenkomsten voor de bespreking van de wiskunde-examens 1982 zullen dit jaar op de volgende data gehouden worden:

v.w.o. wiskunde II	op dinsdag 11 mei van 18.00 uur tot 20.00 uur
l.t.o.-c/mavo-3	op woensdag 12 mei van 16.00 uur tot 18.00 uur
mavo-4	op woensdag 12 mei van 16.00 uur tot 18.00 uur
l.b.o.-c	op donderdag 13 mei van 16.00 uur tot 18.00 uur
v.w.o. wiskunde I	op vrijdag 14 mei van 16.00 uur tot 18.00 uur
havo	op vrijdag 14 mei van 19.00 uur tot 21.00 uur

De bespreking van het examen v.w.o. wiskunde II is centraal en zal in het Jaarbeurscongrescentrum in Utrecht gehouden worden.
De overige besprekingen zullen weer regionaal zijn, in het algemeen op dezelfde plaatsen als vorige jaren. De volledige lijst met adressen wordt in het volgende nummer van Euclides bekend gemaakt.

Het bestuur

Nadere mededelingen omtrent plaats in het volgend nummer van Euclides.

Mededeling
Nederlandse Wiskunde Olympiade 1982

De eerste ronde van de 21ste Ned. Wiskunde Olympiade zal worden gehouden op *vrijdag, 26 maart, 1982* van 14.00 uur – 17.00 uur op de scholen.
Alle VWO/HAVO-scholen krijgen het materiaal hiervoor zonder nadere aanvraag toegezonden.
Op *17 september 1982* volgt de tweede ronde.

W. Kleijne

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Biezeveld, Zuiderstraat 19, 1689 HA Zwaag

H. Boertien, Cito, postbus 1034, 6801 MG Arnhem

H. Freudenthal, F. Schubertstraat 44, 3533 GW Utrecht

Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld

R. Verhulst, Tijllaan 21, 2120 Schoten, België

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam